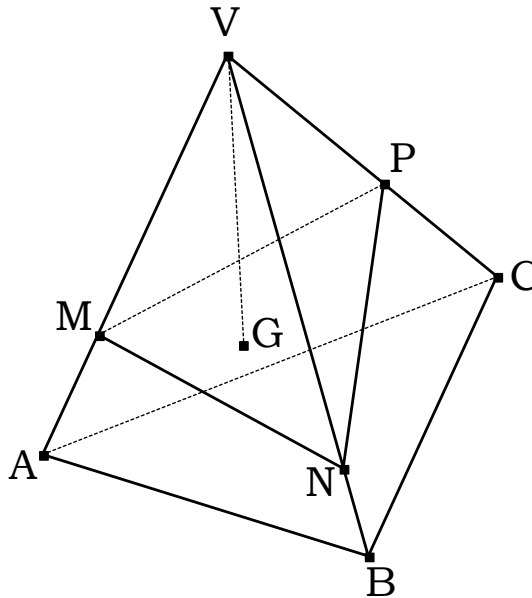


Etapa 6, Problema 1

Un plan taie muchiile VA, VB, VC ale piramidei triunghiulare $VABC$ în punctele M, N respectiv P . Demonstrați că centrul de greutate G al piramidei aparține planului (MNP) dacă și numai dacă $\frac{MA}{MV} + \frac{NB}{NV} + \frac{PC}{PV} = 1$.

Soluție.

Dacă notăm cu a, b, c valorile rapoartelor din enunț, atunci $\overrightarrow{VM} = \frac{1}{a+1}\overrightarrow{VA}$, $\overrightarrow{VN} = \frac{1}{b+1}\overrightarrow{VB}$,
 $\overrightarrow{VP} = \frac{1}{c+1}\overrightarrow{VC}$.



Avem că $G \in (MNP)$ dacă și numai dacă există $x, y, z \in \mathbb{R}$, $x + y + z = 1$, astfel încât $\overrightarrow{VG} = x\overrightarrow{VM} + y\overrightarrow{VN} + z\overrightarrow{VP} = x\frac{1}{a+1}\overrightarrow{VA} + y\frac{1}{b+1}\overrightarrow{VB} + z\frac{1}{c+1}\overrightarrow{VC}$. Dar $\overrightarrow{VG} = \frac{\overrightarrow{VA} + \overrightarrow{VB} + \overrightarrow{VC}}{4}$ și atunci $x = \frac{a+1}{4}$, $y = \frac{b+1}{4}$, $z = \frac{c+1}{4}$ și, prin adunare, deducem că $a + b + c = 1$, adică exact relația ce trebuia demonstrată. ■