Clasa a X-a - Etapa 3 - Problema 3

Enunţ: *În $\mathbb{C}$ se consideră o mulţime finită S care îndeplineşte condiţiile:*

1) Pentru orice $z \in S$ avem $|z| = 1$;

2) Avem $\sum_{z\in S} z = 0$;

3) Pentru orice $z, w \in S$ diferite avem $z + w \neq 0$.

Atunci:

a) *Daţi exemplu de mulţime S cu trei elemente;*

b) *Demonstraţi că S nu poate avea 4 elemente;*

c) *Demonstraţi că pentru orice număr natural $n \geq 5$, se poate construi o mulţime S având n elemente;*

Soluţie:

a) De exemplu $S = \{z \in \mathbb{C} \mid z^3 = 1\}$;

b) Presupunem că există o mulţime cu patru elemente. Fie a, b, c, d aceste elemente. Deoarece ele au module egale, imaginile lor geometrice formează un patrulater inscriptibil. Din $a + b + c + d = 0$ deducem că patrulaterul este dreptunghi ceea ce contrazice proprietatea 3 din ipoteză;

c) Pentru n impar, alegem $S = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}$. Dacă n este par, atunci $n = 3 + (n-3)$. Fie $S_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid z^{n-3} = 1\}$. Este suficient să alegem un număr complex w, de modul 1 astfel încât elementele mulţimii $S_2 = \{wz \mid z^3 = 1\}$ să fie diferite de cele din S_1 şi oricare ar fi $x \in S_1$ şi $y \in S_2$ să avem $x + y \neq 0$. Un astfel de număr este $w = \cos\sqrt{2} + i\sin\sqrt{2}$, sau orice al număr cu argument care nu este de forma $r\pi$, $r \in \mathbb{Q}$.