Etapa 4, Problema 3

Se consideră numerele reale a, b şi c cu $|a|+|b|\neq 0$. Demonstrați că cel puțin una dintre ecuațiile

$$a\sin x+b\cos x+c=0 \text{ şi } a\,\mathrm{tg}x+b\,\mathrm{ctg}x+2c=0$$

are soluții reale.

***

Soluție.

Folosind, de exemplu, metoda unghiului auxiliar, se arată că prima ecuație are soluții reale dacă şi numai dacă $a^2+b^2\geq c^2$.

Presupunem că $a^2+b^2<c^2$. Cu notația $t=\mathrm{tg}\,x$, a doua ecuație devine $at^2+2ct+b=0$, unde trebuie impusă restricția $t\neq 0$.

Dacă $b=0$, atunci $0<|a|<|c|$ şi ecuația în t are soluția nenulă $t_1=-\dfrac{2c}{a}$, care dă soluțiile $x\in\{\mathrm{arctg}\,t_2+k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}$ pentru a doua ecuație din enunț. Dacă $a=0$, atunci $0<|b|<|c|$ şi ecuația în t are soluția nenulă $t_2=-\dfrac{b}{2c}$, care dă soluțiile $x\in\{\mathrm{arctg}\,t_1+k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}$ pentru a doua ecuație din enunț. Dacă $ab\neq 0$, atunci $\Delta=4\left(c^2-ab\right)>4\left(a^2+b^2-ab\right)>0$ şi ecuația în t are două soluții reale nenule, ambele conducând la soluții x pentru cea de-a doua ecuație din enunț.