Clasa a V-a
Soluţii şi bareme

Problema 3. Se consideră numărul $S = 1 + 3 + 3^2 + \ldots + 3^{99}$.
a) Să se arate că S este divizibil cu 484;
b) Să se determine un divizor al lui S, format din patru cifre;
c) Arătaţi că S are un divizor propriu format din cel puţin 45 de cifre.

Soluție și barem de notare:
a) Suma S are 100 de termeni, şi cum 100 este divizibil cu 2 şi 5, deducem că termenii sumei pot fi grupaţi câte 2 sau 5.
Dacă îi grupăm câte 2 obţinem:

$S = 4 + 3^2 \cdot 4 + \ldots + 3^{98} \cdot 4 = 4 \cdot (1 + 3^2 + \ldots + 3^98)$, deci S este divizibil cu 4. .... **1p**
Dacă îi grupăm câte 5 obţinem:
$S = 121 + 3^5 \cdot 121 + \ldots + 3^{95} \cdot 121 = 121 \cdot (1 + 3^5 + \ldots + 3^{95})$, deci S este divizibil cu 121.

Cum S este divizibil cu 4 şi 121, deducem că S este divizibil cu 484. .... **1p**

b) Suma S are 100 de termeni, şi cum 100 este divizibil cu 4 şi 5, deducem că termenii sumei pot fi grupaţi câte 4 sau 5.
Dacă îi grupăm câte 4 obţinem:

$S = 40 + 3^4 \cdot 40 + \ldots + 3^{96} \cdot 40 = 40 \cdot (1 + 3^4 + \ldots + 3^{96})$, deci S este divizibil cu 40 .... **1p**

Dacă îi grupăm câte 5 obţinem:
$S = 121 + 3^5 \cdot 121 + \ldots + 3^{95} \cdot 121 = 121 \cdot (1 + 3^5 + \ldots + 3^{95})$, deci S este divizibil cu 121.

Cum S este divizibil cu 40 şi 121, deducem că S este divizibil cu 4840. .... **1p**

c) Cum S este divizibil cu 2, deducem că $\frac{S}{2}$ este număr natural şi este divizor propriu al lui S **1p**
Vom arăta că $\frac{S}{2}$ are cel puţin 45 de cifre, adică vom arăta că $\frac{S}{2} > 10^{44}$.

Avem:

$$\frac{S}{2} = \frac{(1+3+3^2+\ldots+3^{99})}{2} > \frac{3^99}{2} > 3^{98} = (3^7)^{14} = 2187^{14} > 2000^{14} = 2^{14}\cdot 10^{42} =$$
$$= 16384\cdot 10^{42} > 10000\cdot 10^{42} = 10^{46} > 10^{44} \ldots\ldots$$ **2p**