Extra Comentarii la Problema 3, Testul Seniori Călăraşi, 2013

Abstract. Further comments on Problem 3 of the Călăraşi Seniors Test, 2013.

Data: 7 noiembrie 2013.
Autor: Dan Schwarz, Bucureşti.

Această prezentare specială a Problemei 3, Testul Seniori Călăraşi, 2013, se doreşte a fi o completare la comentariile deja făcute de mine în materialul închinat concursului de la Călăraşi 2013, deja oferit cititorilor.[1] Motivele sunt multiple, atât matematice cât şi meta-matematice, vezi chiar filozofice. Concluzia se va dovedi a fi că problema trebuia evitată.

Subiectul (3). *Să se arate că, oricare ar fi numărul întreg $r \geq 2$, există un graf r-cromatic care nu are cicluri de lungime strict mai mică decât* 6.

(Un graf se numeşte r-cromatic, dacă r este numărul minim de culori necesare colorării vârfurilor, astfel încât oricare două vârfuri adiacente să aibă culori diferite.)

Remarcă (Comentarii). Este o celebră şi fundamentală teoremă a lui Erdös,[2] care afirmă că există grafuri G de talie (*girth*) $g(G)$ oricât de mare şi număr cromatic $\chi(G)$ oricât de mare. Afirmaţia mea că "numărul 6 din enunţ nu joacă evident niciun rol nici în soluţia oficială, care este constructivă, şi nu probabilistică" a fost pripită – din cauză că soluţia oficială (prezentată mai jos) nu face decât să **afirme** inexistenţa unor cicluri mai scurte (decât 6), am dedus că acest lucru ar fi adevărat pentru orice alte lungimi, dar în construcţia prezentată numeroase cicluri de lungime 6 sunt de fapt create. Mea culpa!

Soluţie Oficială. Pentru $r = 2$ putem alege orice ciclu de lungime pară, mai mare ca 5. Pentru $r \geq 3$ definim şirul de grafuri $(G_r)_{r\geq 3}$ în felul următor. Graful $G_3 = C_7$ este ciclul de lungime 7 (se poate lua şi orice lungime impară mai mare). Odată ce graful G_r, cu $|G_r| = n_r$ vârfuri, este definit, construim G_{r+1} începând cu $\binom{rn_r - r + 1}{n_r}$ cópii disjuncte ale lui G_r, la care adăugăm $rn_r - r + 1$ noi vârfuri. Stabilim o bijecţie (arbitrară) între copiile lui G_r şi submulţimile de câte n_r dintre noile vârfuri. Unim fiecare copie a lui G_r cu submulţimea corespunzătoare de câte n_r vârfuri noi prin n_r muchii disjuncte (un aşa-numit *cuplaj*, sau 1-*factor*). Graful rezultat este numit G_{r+1}. Se poate demonstra acum că G_r astfel construite nu conţin cicluri mai scurte decât 6, şi că $\chi(G_r) \geq r$; dacă $\chi(G_r) > r$, el va conţine un subgraf indus de număr cromatic r. $\square$

[1] Subiecte, soluţii oficiale şi rezultate complete pe pagina specială a site-ului SSMR `http://ssmr.ro/activitati/concursuri/Ion_Barbu_2013`.

[2] ⟨⟨In a pioneering paper of 1959, founding the now called *probabilistic method* in graph theory⟩⟩ [R. Diestel – *Graph Theory*], Chapter 11.

Articolul următor
http://www.math.uchicago.edu/ may/VIGRE/VIGRE2008/REUPapers/Zhang.pdf
construieşte o famile $\mathcal{F}$ de grafuri simple finite, fără cicluri de lungime 3 (triunghiuri), şi cu numere cromatice oricât de mari, în mod iterativ.

Soluţie. Se începe cu $T_1 = K_1$, graful cu un vârf (şi fără muchii). Apoi, fiind dat un graf T_k al familiei $\mathcal{F}$, se construieşte un graf T_{k+1} în paşii următori

(1) Se alege o mulţime independentă de $k-1$ vârfuri $M = \{v_1, \ldots, v_{k-1}\}$.
(2) Pentru această mulţime, se crează un nou vârf u_M, zis *ascendentul* mulţimii $M = \{v_1, \ldots, v_{k-1}\}$, şi muchiile $e_i = u_M v_i$, $1 \leq i \leq k-1$. Se procedează astfel pentru orice mulţime independentă de $k-1$ vârfuri de la punctul (1).
(3) Se crează un nou vârf c, zis *critic*, şi muchiile cu_M între c şi fiecare vârf u_m creat la punctul (2).

Se demonstrează că într-adevăr există mulţimi independente de $k-1$ vârfuri în T_k, că T_k nu conţine triunghiuri, şi că T_k are număr cromatic $\chi(T_k) = k$. Crearea grafurilor $T_1 \mapsto T_2 \mapsto T_3 \mapsto T_4$ este exemplificată. □

Ar fi fost de preferat să fi fost măcar întrebată doar această variantă minimală, dacă tot se particulariza problema; existau mai multe şanse de a avea soluţii, căci există cel puţin cele două construcţii prezentate mai sus. Dar rămân la convingerea că existenţa unor construcţii explicite pentru aceste cazuri nu justifică utilizarea unei teoreme celebre în condiţii de concurs, ci mai degrabă ar putea face corpul unei prelegeri.

Pentru demonstraţia probabilistică a lui Erdös, trimitem la [REINHARD DIESTEL – *Graph Theory*], Capitolul 11, paginile 229-237; cartea este disponibilă pentru download de pe Internet.

Remarcă. Rezultatele sunt extrem de slabe (16/231, cu o medie de ceva mai puţin de 0.5/7 pentru cei 33 de concurenţi), ceea ce nu este de foarte mare mirare.

Puncte	$7-6$	$5-4$	$3-2$	$1-0$
# Note (Sub. 4)		1	2	30

Pentru că tot mai am ceva loc în această prezentare, voi discuta şi Problema 2.

Subiectul (2)**.** *Fie a, b, c şi n patru numere întregi, unde $n \geq 2$, şi fie p un număr prim care divide numerele a^2+ab+b^2 şi $a^n+b^n+c^n$, dar nu divide suma $a+b+c$. Să se arate că numerele n şi $p-1$ nu sunt coprime.*

Soluţie. Posibilitatea $p = 2$ este înlăturată mult mai rapid decât în soluţia oficială, folosind faptul că $a^n+b^n+c^n \equiv a+b+c \pmod 2$ pentru orice $n \geq 2$. Deci p este impar, iar atunci dacă n este par vom avea $2 \mid \operatorname{cmmdc}(n, p-1)$, deci considerăm cazul n impar.

Dacă am avea $p \mid a$, atunci şi $p \mid b$ (din $p \mid a^2+ab+b^2$), şi deci $p \mid c$ (din $p \mid a^n+b^n+c^n$), ceea ce ar implica $p \mid a+b+c$, absurd. Prin urmare $a \not\equiv 0 \pmod p$, şi pentru $B \equiv ba^{-1} \pmod p$, $C \equiv ca^{-1} \pmod p$, vom avea $B^2+B+1 \equiv B^n+C^n+1 \equiv 0 \pmod p$, dar $B+C+1 \not\equiv 0 \pmod p$ (am redus astfel numărul variabilelor la două).

Dacă am avea $B \equiv 1 \pmod p$, atunci $3 \equiv 0 \pmod p$, deci $p = 3$, dar nu putem atunci avea $C^n \equiv 1 \pmod 3$ şi $C \not\equiv 1 \pmod 3$, căci n este impar. Prin urmare $B \not\equiv 1 \pmod p$, dar $B^3 - 1 = (B-1)(B^2+B+1) \equiv 0 \pmod p$, deci $B^3 \equiv 1 \pmod p$. Ordinul multiplicativ al lui B modulo p fiind deci 3, vom avea $3 \mid p-1$ (din mica teoremă a lui Fermat). Dacă am avea şi $3 \mid n$, atunci $3 \mid \mathrm{cmmdc}(n, p-1)$, deci rămâne de considerat cazul $3 \nmid n$.

Rezultă că $B^{2n} + B^n + 1 \equiv B^2 + B + 1 \equiv 0 \pmod p$, deci vom avea $C^n \equiv B^{2n} \equiv -(B+1)^n \pmod p$, adică $(-C(B+1)^{-1})^n \equiv 1 \pmod p$. Dar $B + C + 1 \not\equiv 0 \pmod p$ se scrie şi $-C(B+1)^{-1} \not\equiv 1 \pmod p$, aşadar ordinul multiplicativ ν al lui $-C(B+1)^{-1}$ modulo p este mai mare decât 1, şi atunci $1 < \nu \mid \mathrm{cmmdc}(n, p-1)$. $\square$

Remarcă. Soluţia oficială face observaţia că dacă $n > 3$ este prim, atunci (având $\nu = n$) vom avea $n \mid p-1$; cum avem şi $6 \mid p$ (şi $\mathrm{cmmdc}(n, 6) = 1$), rezultă chiar $6n \mid p-1$, ca în exemplul dat $(a, b, c, n, p) = (4, 7, -13, 5, 31)$.

Deşi această problemă a adus cel mai mare punctaj (94/231, cu o medie de ceva mai puţin de 3/7 pentru cei 33 de concurenţi), rezultatele pot fi considerate relativ slabe, dat fiind gradul redus de dificultate a problemei.

Puncte	$7-6$	$5-4$	$3-2$	$1-0$
# Note (Sub. 2)	7	3	9	14