Problema 4
Etapa 5
Clasa a VI-a

Problema 4. Fie p, q şi r numere prime astfel încât $N = \frac{1}{p} + \frac{2}{q} + \frac{3}{r}$ să fie număr natural. Arătaţi că N este număr prim.

Mihai Bunget, Tg.Jiu

Soluţie: Din relaţia $N = \frac{1}{p}+\frac{2}{q}+\frac{3}{r}$, deducem că $Npqr = qr+2pr+3pq$.

De aici obţinem că numărul qr este divizibil cu p şi cum p, q şi r sunt prime obţinem că $p = q$ sau $p = r$.

Dacă $p = q$, atunci $N = \frac{3}{p} + \frac{3}{r}$ deci $Npr = 3r + 3p$ de unde deducem că p divide pe $3r$, deci $p = 3$ sau $p = r$.

Dacă $p = 3$, cum N este natural deducem că $r = 3$.

Dacă $p = r$ obţinem $N = \frac{6}{p}$ şi cum N este natural deducem că $p \in \{2, 3\}$. în cele două cazuri obţinem $N \in \{2, 3\}$.

Dacă $p = r$, atunci $N = \frac{4}{p}+\frac{2}{q}$. Cum N este natural, se deduce în mod similar că $p = q = 2$ sau $p = q = 3$, deci $N \in \{2, 3\}$.

În concluzie N este număr prim.