Problema 4. Fie $n \geq 2$ un număr natural fixat. Un pion este plasat pe o tablă dreptunghiulară $1 \times n$ formată din n pătrăţele 1×1 numerotate, în ordine, de la 1 la n. Pionul poate face două tipuri de mutări: de pe pătrăţelul k el poate muta în pătrăţelul $k-2$ (dacă $k-2 \geq 1$) sau poate muta în pătrăţelul $2k$ (dacă $2k \leq n$). Scopul este de a face o succesiune de mutări astfel încât pionul să treacă prin cât mai multe dintre cele n pătrăţele. Pătrăţelul de pe care porneşte la început pionul poate fi ales în mod convenabil. Un pătrăţel poate fi vizitat şi de mai multe ori, dar în acest caz el va fi numărat o singură dată. În funcţie de valoarea numărului natural n, stabiliţi numărul maxim de pătrăţele pe care le poate vizita pionul.

Andrei Eckstein

Soluţie: Vom demonstra că pentru $n \in \{2,3\} \cup \{4k \mid k \in \mathbb{N}^*\} \cup \{4k+1 \mid k \in \mathbb{N}^*\}$ răspunsul este că se pot vizita toate cele n pătrăţele, în vreme ce pentru $n \in \{4k+2 \mid k \in \mathbb{N}^*\} \cup \{4k+3 \mid k \in \mathbb{N}^*\}$ răspunsul este că se pot vizita cel mult $n-1$ pătrăţele.

O primă observaţie este că dacă pionul ajunge la un moment dat pe un pătrăţel cu număr par, atunci el va vizita în continuare numai pătrăţele cu număr par. Într-adevăr, indiferent de tipul mutării, de pe un pătrăţel cu număr par se poate ajunge numai într-unul cu număr par.

Pentru $n = 2$ putem parcurge pătrăţelele astfel: $1 \mapsto 2$.

Pentru $n = 3$ putem parcurge pătrăţelele astfel: $3 \mapsto 1 \mapsto 2$.

Pentru $n = 4k$, $k \in \mathbb{N}^*$, pornim de la $4k-1$ şi parcurgem toate pătrăţelele cu număr impar în ordine descrescătoare până la 1. Apoi vom face mutări de celălalt tip ($1 \mapsto 2 \mapsto 2^2 \mapsto \ldots$) până când ajungem la o putere a lui 2 situată printre numerele $2k, 2k+2, \ldots, 4k-2$. (Vom arăta imediat că există mereu o asemenea putere a lui 2.) Dacă $2k \leq 2^j < 4k$, facem mutări de tipul $2^j \mapsto 2^j - 2 \mapsto 2^j - 4 \mapsto \ldots \mapsto 2k$. Odată ajunşi la $2k$ efectuăm $2k \mapsto 4k$. De aici, cu mutări de tip $m \mapsto m-2$ se pot vizita toate pătrăţelele cu număr par. În cele din urmă, se vizitează toate pătrăţelele.

Să arătăm că între $2k-1$ şi $4k-1$ există mereu o putere a lui 2. Presupunând contrariul, numerele $2k-1$ şi $4k-1$ sunt între două puteri consecutive ale lui 2, deci există un $\ell \in \mathbb{N}$ astfel ca $2^\ell < 2k-1 < 4k-1 < 2^{\ell+1}$. Dar $2^\ell < 2k-1$ implică $2^{\ell+1} < 4k-2$, ceea ce contrazice $4k-1 < 2^{\ell+1}$.

Pentru $n = 4k+1$ procedăm exact ca pentru $n = 4k$: pornim de la $4k+1$ şi parcurgem pătrăţelele impare în ordine descrescătoare, apoi, exact ca la $4k$, parcurgem toate numerele pare până la $4k$ inclusiv.

Putem proceda analog şi pentru $n = 4k+2$ şi $n = 4k+3$: pornim de la cel mai mare număr impar, parcurgem toate numere impare (în ordine descrescătoare), apoi toate numerele pare mai mici decât $4k+1$. Astfel vom vizita $n-1$ pătrăţele, toate în afara lui $4k+2$.

Mai rămâne să arătăm că, în aceste ultime două cazuri, nu putem vizita toate pătrăţelele.

Pentru aceasta este suficient să observăm că şi în pătrăţelul $2k-1$ şi în cel $4k+2$

se ajunge numai din pătrăţelul $2k+1$. Ori pătrăţelele impare pot fi vizitate o singură dată (între două vizite ale unui pătrăţel trebuie făcute mutări de ambele feluri, iar asta înseamnă că s-au făcut dublări, ori, am văzut, după ce s-a obţinut un număr par nu se mai pot obţine numere impare). În concluzie, nu pot fi vizitate simultan pătrăţelele $2k-1$ şi $4k+2$ (asta dacă $k \geq 1$; pentru $k=0$ pătrăţelul $2k-1$ nu există, motiv pentru care şi apar excepţiile $n=2$ şi $n=3$). Aşadar, dacă $n=4k+2$ sau $n=4k+3$ cu $k \in \mathbb{N}^*$, numărul maxim de pătrăţele ce pot fi vizitate este $n-1$.