Problemă. Arătaţi că ecuaţia

$$2^x + 2^{\sqrt{1-x^2}} = 3$$

nu are soluţii în intervalul $(0;\ 1)$.

Ştefania Constantinescu, Bucureşti

Soluţie. Demonstrăm că pentru orice $x \in \left(0;\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$ avem $2^x + 2^{\sqrt{1-x^2}} > 3 \qquad (1)$.

Avem

$$2^{x+1} + 2 \cdot 2^{\sqrt{1-x^2}} = 2^{x+1} + 2^{\sqrt{1-x^2}} + 2^{\sqrt{1-x^2}}$$

şi din inegalitatea mediilor

$$2^{x+1} + 2^{\sqrt{1-x^2}} + 2^{\sqrt{1-x^2}} \geq 3\sqrt[3]{2^{x+1+2\sqrt{1-x^2}}}.$$

Pentru a demonstra (1) este suficient să demonstrăm că $3\sqrt[3]{2^{x+1+2\sqrt{1-x^2}}} > 6$, adică

$$\sqrt[3]{2^{x+1+2\sqrt{1-x^2}}} > 2$$

sau

$$2^{x+1+2\sqrt{1-x^2}} > 2^3$$

adică

$$x + 1 + 2\sqrt{1 - x^2} > 3$$

care se mai scrie

$$2\sqrt{1 - x^2} > 2 - x.$$

Cum $x \in (0;\ 1)$ înseamnă că $2 - x > 0$ şi deci, ultima inegalitate se poate ridica la pătrat. Avem de arătat că

$$4 - 4x^2 > 4 - 4x + x^2$$

adică
$$5x^2 - 4x < 0$$
ceea ce este echivalent cu
$$x \in \left(0; \frac{4}{5}\right).$$

Deoarece $x \in \left(0; \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right] \subset \left(0; \dfrac{4}{5}\right)$ deducem că ecuaţia nu are soluţii în $x \in \left(0; \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$.

Demonstrăm acum că ecuaţia nu are soluţii în $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}; 1\right)$.

Presupunem prin absurd, că există o soluţie $y \in \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}; 1\right)$.

Atunci
$$2^y + 2^{\sqrt{1-y^2}} = 3$$
Notăm $x = \sqrt{1-y^2}$. Cum $\dfrac{1}{2} < y^2 < 1$ rezultă $0 < 1-y^2 < \dfrac{1}{2}$ sau $0 < \sqrt{1-y^2} < \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, adică $x \in \left(0; \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$.

Din $x = \sqrt{1-y^2}$ deducem că $y = \sqrt{1-x^2}$ şi ultima egalitate se scrie
$$2^{\sqrt{1-x^2}} + 2^x = 3$$
adică ecuaţia are soluţie în $\left(0; \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$ ceea ce este fals.

În concluzie, ecuaţia nu are soluţie în $(0;\ 1)$.

De fapt problema revine la a arăta că ecuaţia $2^{\sin x} + 2^{\cos x} = 3$ nu are soluţii în $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$, iar cele două cazuri considerate mai sus se bazează pe faptul că folosind $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$ şi $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$, este suficient să arătăm că ecuaţia nu are soluţii pe intervalul $\left(0,\ \frac{\pi}{4}\right]$.