CONCURSUL VIITORI OLIMPICI

MIHAI BĂLUNĂ, MIHAI MONEA, MARIUS PERIANU, GABRIEL POPA

Rezumat. Acest material are scop prezentarea subiectelor propuse la etapa finală a Concursului Viitori Olimpici, în ediţiile 2010 - 2015

INTRODUCERE. Faza finală a Concursului *Gazeta Matematică şi Viitori Olimpici*, găzduit în ultimii ani de frumosul oraş Câmpulung Muscel, adună în a doua jumătate a lunii august pe cei care, de-a lungul unui an şcolar, se dovedesc a fi buni rezolvitori ai problemelor publicate pe site-ul ViitoriOlimpici.ro, precum şi în Gazeta Matematică. În tabără, aceşti elevi au de rezolvat trei probleme, una fiind selectată dintre cele publicate pe site şi alta din ultimele numere ale Gazetei. În plus, concurenţii susţin o probă orală.
Prezentăm în continuare subiectele propuse participanţilor la cele şase ediţii precedente. Urăm succes actualilor concurenţi, în confruntarea cu problemele ediţiei a şaptea!

1. Ediţia I -17 august 2010

Problema 1. *Arătaţi că orice submulţime cu* $7n+1$ *elemente a mulţimii* $\{1,\ 2,\ ...,\ 8n\}$ *conţine patru numere* a, b, c *şi* d *astfel încât* $a|b$, $b|c$ *şi* $c|d$.

Soluţie. Considerăm submulţimile mulţimii $\{1,\ 2,\ ...,\ 8n\}$ de forma

$$C_k = \left\{2k-1,\ 2\left(2k-1\right),\ 2^2\left(2k-1\right),\ ...\right\},\ k = \overline{1, 4n}.$$

Submulţimile $C_{2n+1},\ C_{2n+3},\ ...,\ C_{4n}$ conţin câte un singur element. În total, aceste $2n$ submulţimi au $2n$ elemente. Submulţimile $C_{n+1},\ C_{n+2},\ ...,\ C_{2n}$ conţin câte două elemente, deci, în total, aceste n submulţimi au $2n$ elemente.

Rămân $3n+1$ elemente în submulţimile $C_1,\ C_2,\ ...,\ C_n$, ceea ce înseamnă, conform principiului cutiei, că măcar una dintre aceste mulţimi conţine patru elemente. În acest moment, concluzia se impune. □

Problema 2. *Pe o tablă* $2n \times 2n$ *se află pietre albe şi pietre roşii, cel mult o piatră în fiecare pătrat* 1×1. *Se execută următoarele operaţii:*

(i) *de pe fiecare coloană pe care se află o piatră albă se elimină toate pietrele roşii;*

(ii) *de pe fiecare linie pe care a rămas o piatră roşie se elimină toate pietrele albe.*

Arătaţi că dintr-una dintre culori au rămas cel mult n^2 *pietre.*

Olimpiadă Rusia

Date: 31 Martie 2016.

Soluţie. După executarea celor două operaţii, rămân doar linii şi coloane monocolore. Fie l_a numărul de linii albe (adică cele care conţin doar pietre albe), l_r numărul de linii roşii, c_a numărul de coloane albe şi c_r numărul de coloane roşii. Numărul de pietre albe poate fi, în final, cel mult $l_a \cdot c_a$, iar cel de pietre roşii cel mult $l_r \cdot c_r$. Este suficient să arătăm că $l_a \cdot c_a \leqslant n^2$ sau $l_r \cdot c_r \leqslant n^2$.

Dacă $l_a + c_a \leqslant 2n$, atunci

$$l_a \cdot c_a \leqslant l_a\,(2n - l_a) = n^2 - (n - l_a)^2 \leqslant n^2.$$

Dacă $l_a + c_a > 2n$, rezultă că

$$l_r + c_r = 4n - (l_a + c_a) \leqslant 2n$$

şi, ca mai sus, $l_r \cdot c_r \leqslant n^2$. □

Problema 3. *Şirul de numere naturale $(x_n)_{n\geqslant 0}$ este definit prin $x_0 = x_1 = 1$ şi*

$$x_{n+1} = 14x_n - x_{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Demonstraţi că, pentru fiecare număr natural n, numărul $2x_n - 1$ este pătrat perfect.

VIITORIOLIMPICI.RO

Soluţie. Soluţiile ecuaţiei caracteristice sunt

$$t_{1,2} = \left(2 \pm \sqrt{3}\right)^2.$$

Termenul general al şirului are forma

$$x_n = c_1 t_1^n + c_2 t_2^n$$

şi, ţinând seama de condiţia $x_0 = x_1 = 1$, identificăm constantele c_1 şi c_2; obţinem

$$x_n = \frac{1}{4}\left(\left(2 + \sqrt{3}\right)^{2n-1} + \left(2 - \sqrt{3}\right)^{2n-1}\right).$$

Dar $2 \pm \sqrt{3} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{3} \pm 1\right)^2$, deci vom avea

$$2x_n - 1 = \frac{1}{2^{2n}}\left(\left(\sqrt{3} + 1\right)^{4n-2} + \left(\sqrt{3} - 1\right)^{4n-2}\right) - 1$$

$$= \left(\frac{\left(1 + \sqrt{3}\right)^{2n-1} + \left(1 - \sqrt{3}\right)^{2n-1}}{2^n}\right)^2.$$

Rămâne de arătat că numărul din paranteza este natural. Evident că acest număr este raţional, iar divizibilitatea cu 2^n se dovedeşte, de exemplu, prin inducţie, folosind faptul că expresia de la numărător, fie ea a_{2n-1}, satisface relaţia de recurenţă $a_n - 2a_{n-1} - 2a_{n-2} = 0$. □

2. Ediţia a II-a - 19 august 2011

Problema 1. *Se consideră numerele reale a_1, a_2, a_3 şi numerele complexe nenule z_1, z_2, z_3 astfel încât $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ şi*

$$\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_3} + \frac{z_3}{z_1} = 1.$$

Determinaţi valorile posibile ale numărului $|a_1z_1 + a_2z_2 + a_3z_3|$.

ViitoriOlimpici.ro

Soluţie. Avem că

$$z_1^2z_3 + z_2^2z_1 + z_3^2z_2 = z_1z_2z_3.$$

Prin conjugarea relaţiei $\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_3} + \frac{z_3}{z_1} = 1$, obţinem că $\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} + \frac{\overline{z_2}}{\overline{z_3}} + \frac{\overline{z_3}}{\overline{z_1}} = 1$, de unde $\frac{z_2}{z_1} + \frac{z_3}{z_2} + \frac{z_1}{z_3} = 1$, adică

$$z_3^2z_1 + z_1^2z_2 + z_2^2z_3 = z_1z_2z_3.$$

Din aceste două egalităţi deducem că $\sum z_1^2z_3 - z_3^2z_1 = 0$, prin urmare

$$(z_1 - z_2)(z_2 - z_3)(z_3 - z_1) = 0.$$

Rezultă că sunt posibile doar următoarele trei situaţii:

1) $z_1 = z_2 \Rightarrow z_1^2 + z_3^2 = 0 \Rightarrow z_3 = \pm iz_1 \Rightarrow |a_1z_1 + a_2z_2 + a_3z_3| = \sqrt{(a_1 + a_2)^2 + a_3^2}$;

2) $z_2 = z_3 \Rightarrow z_1^2 + z_3^2 = 0 \Rightarrow z_1 = \pm iz_3 \Rightarrow |a_1z_1 + a_2z_2 + a_3z_3| = \sqrt{(a_3 + a_2)^2 + a_1^2}$;

3) $z_1 = z_3 \Rightarrow z_1^2 + z_2^2 = 0 \Rightarrow z_2 = \pm iz_1 \Rightarrow |a_1z_1 + a_2z_2 + a_3z_3| = \sqrt{(a_3 + a_1)^2 + a_2^2}$.

□

Problema 2. *Se consideră $n \geq 3$ puncte, oricare trei necoliniare. Se trasează $C_{n-1}^2 + 1$ segmente având capetele în puncte dintre cele considerate. Arătaţi că oricare două puncte pot fi unite printr-o linie poligonală formată din segmente trasate.*

Marius Perianu

Soluţie. Presupunem prin absurd ca există două puncte A şi B care nu pot fi unite printr-o linie poligonală formată din segmentele trasate. Notăm cu $V(A)$ mulţimea punctelor care pot fi unite prin linii poligonale cu A (inclusiv punctul A) şi fie $k = |V(A)|$ numărul de vârfuri. Deoarece $B \notin V(A)$, rezultă $k \leq n - 1$.

Arătăm că celelalte $n - k$ puncte nu sunt unite prin segmente cu puncte din $V(A)$. Într-adevăr, dacă $C \in V(A)$, $D \notin V(A)$ şi punctele C,D sunt unite printr-un segment, atunci o linie poligonală de la A la C se poate prelungi la o linie poligonală de la A la D, contradicţie cu $D \notin V(A)$.

Astfel, numărul segmentelor netrasate (numărul perechilor de puncte între care nu s-a trasat un segment) este $N \geq k(n-k) \geq n - 1$, iar al celor trasate este $C_{n-1}^2 + 1$.

În total, am avea cel puţin $n-1+C_{n-1}^2+1 = n-1+\frac{(n-1)(n-2)}{2}+1 = C_n^2+1$ segmente, ceea ce este fals, deoarece între n puncte se pot trasa C_n^2 segmente. □

Problema 3. *Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, şi $a_1 = 1 < a_2 < ... < a_{\varphi(n)}$ toate numerele relativ prime cu n, mai mici decât n. Arătaţi că numerele $a_1, a_2, ..., a_{\varphi(n)}$ sunt în progresie aritmetică dacă şi numai dacă n este 6 sau număr prim sau o putere a lui 2.*

LAURENŢIU PANAITOPOL

Soluţie. Dacă $n \in \{6\} \cup \left\{2^k \mid k \in \mathbb{N}^*\right\}$ sau este număr prim, atunci

$$a_1,\ a_2,\ ...,\ a_{\varphi(n)}$$

sunt în progresie aritmetică.

Reciproc, dacă $a_1, a_2, ..., a_{\varphi(n)}$ sunt în progresie aritmetică, atunci:

a) dacă $\varphi(n) = 1$, atunci $n = 2$, iar dacă $\varphi(n) = 2$, atunci $n = 3, 4, 6$;

b) dacă $\varphi(n) \geq 3$, avem situaţiile:

- dacă $a_2 = 2$, atunci n este prim;
- dacă $a_2 = 3$, atunci $a_k = 2k - 1$, $k = \overline{1, \varphi(n)}$, de unde rezultă că n este o putere a lui 2;
- dacă $a_2 \geq 4$, atunci, deoarece $a_2 > 3$, rezultă $3 \mid n$ şi $3 \nmid a_2$. Dar $a_3 = 2a_2 - a_1 = 2a_2 - 1$, şi cum $3 \nmid a_3$, rezultă $a_2 \equiv 1 \pmod 3$.

Dar $n - 1 = a_{\varphi(n)} = a_1 + (\varphi(n) - 1)(a_2 - a_1) = 1 + (\varphi(n) - 1)(a_2 - 1)$, deci $n = 2 + (\varphi(n) - 1)(a_2 - 1)$. De aici, cum $a_2 \equiv 1 \pmod 3$, rezultă că $n \equiv 2 \pmod 3$, fals, întrucât $3 \mid n$. □

3. EDIŢIA A III-A - 22 AUGUST 2012

Problema 1. *Spunem că un număr complex z are proprietatea P dacă există m_z, n_z numere naturale, nu ambele nule, astfel încât*

$$z^{m_z} = (1+z)^{n_z} = 1.$$

a) *Determinaţi numerele complexe cu proprietatea P;*

b) *Pentru fiecare z cu proprietatea P, determinaţi perechile (m_z, n_z) corespunzătoare pentru care $m_z + n_z = 2012$.*

VIITORIOLIMPICI.RO

Soluţie. a) Fie $\zeta_n = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$ rădăcina primitivă de ordin n a unităţii. Elementele mulţimilor $A_n = \left\{\zeta_n - 1, \zeta_n^2 - 1, ..., \zeta_n^{n-1} - 1\right\}, n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2$ au proprietatea P (luăm $m_z = 0$). De asemenea, elementele mulţimilor

$$B_m = \left\{1, \zeta_m, \zeta_m^2, ..., \zeta_m^{m-1}\right\} \setminus \{-1\},$$

$m \in \mathbb{N}, m \geqslant 2$ au proprietatea P (luăm $n_z = 0$).

În cazul în care m_z, n_z sunt ambele nenule, atunci $z \in C(O,1) \cap C(M,1)$, unde M este punctul de afix -1 , prin urmare $z \in \left\{\zeta_3, \zeta_3^2\right\}$. În concluzie, numerele complexe care au proprietatea P sunt cele din

$$\left(\bigcup_{n=2}^{\infty} A_n\right) \cup \left(\bigcup_{m=2}^{\infty} B_m\right).$$

b) Dacă $n \geqslant 2$ este divizor al lui 2012 şi $z \in A_n$, atunci $(m_z, n_z) = (0, 2012)$; pentru celelalte elemente din $\bigcup_{n=2}^{\infty} A_n$ nu există perechi (m_z, n_z) cu proprietatea cerută. La fel, dacă $m \geqslant 2$ este divizor al lui 2012 şi $z \in B_m$, atunci $(m_z, n_z) = (2012, 0)$

; pentru celelalte elemente din $\bigcup\limits_{m=2}^{\infty} B_m$ nu există perechi (m_z, n_z) cu proprietatea cerută.

Dacă $z \in \left\{\zeta_3, \zeta_3^2\right\}$, nu există perechi (m_z, n_z) cu ambele componente nenule: suma $m_z + n_z$ se divide cu 3, în timp ce 2012 nu se divide cu 3. $\square$

Problema 2. *Fie $ABCD$ un pătrat de centru O. Dacă $P \in [AD]$, demonstraţi că există punctele $M \in [AB]$ şi $N \in [BC]$ astfel încât O este ortocentrul triunghiului MNP dacă şi numai dacă $3AP \geqslant 2AD$.*

GABRIEL POPA & PAUL GEORGESCU

Soluţie. Raportăm planul la un reper cartezian astfel încât

$$O\left(0,0\right); A\left(-1,-1\right); B\left(1,-1\right); C\left(1,1\right); D\left(-1,1\right).$$

Fie $M\left(a,-1\right), N\left(1,b\right), P\left(-1,c\right)$ puncte cu proprietatea că O este ortocentrul triunghiului MNP. Din $OP \perp MN$ şi $OM \perp PN$ rezultă că $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{MN} = 0$, respectiv $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{PN} = 0$. Cum $\overrightarrow{OP}\left(-1,c\right), \overrightarrow{MN}\left(1-a,b+1\right), \overrightarrow{OM}\left(a,-1\right), \overrightarrow{PN}\left(2,b-c\right)$, obţinem că $a-1+bc+c=0$, respectiv $2a-b+c=0$. Eliminând a între cele două relaţii, deducem că $2-c=b\left(2c+1\right)$.

Situaţia $c=-\frac{1}{2}$ conduce la o contadicţie, deci putem scrie $b=\frac{2-c}{2c+1}$. Impunem condiţia $-1 \leqslant b \leqslant 1$ şi rezultă că $c \in \left[\frac{1}{3},1\right]$, prin urmare $3AP \geqslant 2AD$.

Reciproc, să presupunem că $3AP \geqslant 2AD$, adică $c \in \left[\frac{1}{3},1\right]$. Atunci $b=\frac{2-c}{2c+1} \in [\,-1,1]$, iar $a=\frac{b-c}{2}=\frac{1-c-c^2}{2c+1} \in [\,-1,1]$, după cum se constată uşor. Punctele $M\left(\frac{1-c-c^2}{2c+1},-1\right)$ şi $N\left(1,\frac{2-c}{2c+1}\right)$ completează un triunghi MNP al cărui ortocentru este O. $\square$

Problema 3. *Demonstraţi că nu există funcţii $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ pentru care să fie îndeplinite, simultan, condiţiile:*

(i) $f\left(1\right)=1$;

(ii) există $M>0$ astfel încât $-M \leqslant f\left(x\right) \leqslant M, \forall x \in \mathbb{R}$;

(iii) $f\left(x+\frac{1}{x^2}\right)=f\left(x\right)+\left(f\left(\frac{1}{x}\right)\right)^2, \forall x \in \mathbb{R}^*$.

OLIMPIADĂ IRAN

Soluţie. Luând $x=1$ în (iii) obţinem că $f\left(2\right)=2$, prin urmare $M \geqslant 2$. Fie $n \in \mathbb{N}^*$ cel mai mic număr natural cu proprietatea că $f\left(x\right)<n, \forall x \in \mathbb{R}^*$; avem că $n>2$.

Putem găsi $a \in \mathbb{R}^*$ astfel încât $f\left(a\right) \geqslant n-1$ şi atunci

$$\left(f\left(\frac{1}{a}\right)\right)^2=f\left(a+\frac{1}{a^2}\right)-f\left(a\right)<n-\left(n-1\right)=1,$$

prin urmare $f\left(\frac{1}{a}\right)>-1$. Aplicând (iii) pentru $x=\frac{1}{a}$, obţinem că

$$\left(n-1\right)^2 \leqslant \left(f\left(a\right)\right)^2=f\left(\frac{1}{a}+a^2\right)-f\left(\frac{1}{a}\right)<n-1.$$

Deducem că $n \in \{1,2\}$ şi astfel am ajuns la o contradicţie. $\square$

4. Ediţia a IV-a - 23 august 2013

Problema 1. *Determinaţi numerele naturale nenule n pentru care se poate construi o mulţime de numere complexe M, având n elemente, cu proprietăţile:*
(i) $|z| = 1$*, oricare ar fi* $z \in M$*;*
(ii) $\sum_{z \in M} z = 0$*;*
(iii) $z + w \neq 0$*, oricare ar fi* $z, w \in M$*.*

ViitoriOlimpici.ro

Soluţie. Evident, valorile $n = 1$ şi $n = 2$ nu convin. Orice număr impar $n \geq 3$ este bun: alegem $M = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}$.

Valoarea $n = 4$ nu convine: dacă $M = \{a, b, c, d\}$, atunci a, b, c, d vor fi afixele vârfurilor unui patrulater inscriptibil $ABCD$. Notăm cu $P\,(p)$ şi $Q\,(q)$ mijloacele laturilor AB, respectiv CD. Cum $2p = a + b$ şi $2q = c + d$, condiţia $a + b + c + d = 0$ arată că O este mijlocul segmentului PQ. Diametrul care trece prin mijlocul unei coarde (care nu este ea însăşi diametru) este perpendicular pe acea coardă, prin urmare PQ este perpendiculară atât pe AB, cât şi pe CD şi O se află la egală distanţă de aceste două coarde. Rezultă că patrulaterul $ABCD$ este dreptunghi, ceea ce contrazice (iii).

Orice număr par $n \geq 6$ este bun: alegem

$$M = \{z \in \mathbb{C} \mid z^{n-3} = 1\} \cup \{wz \mid z^3 = 1\},$$

unde $w = \cos\alpha + i \sin\alpha$, cu $\alpha \notin \{r\pi \mid r \in \mathbb{Q}\}$.

în concluzie, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2, 4\}$. □

Problema 2.

a) *Fie $ABCD$ un patrulater convex. Arătaţi că discurile având ca diametre laturile AB, BC, CD şi DA acoperă în întregime interiorul patrulaterului $ABCD$.*

Gazeta Matematică 6-7-8/2013

b) *Fie $ABCD$ un patrulater. Demonstraţi că discurile având ca diametre segmentele AB, AC şi AD acoperă în întregime interiorul triunghiului BCD.*

Soluţie. a) Fie M un punct în interiorul patrulaterului $ABCD$; atunci

$$\angle AMB + \angle BMC + \angle CMD + \angle DMA = 360^\circ.$$

Rezultă că cel puţin unul dintre cele patru unghiuri are măsura de măcar 90°. Dacă $\angle AMB$ este un astfel de unghi, M aparţine discului de diametru AB şi, de aici, cerinţa problemei.

b) Notăm cu P, Q şi R proiecţiile vârfului A pe dreptele BC, CD respectiv DB. Indiferent de natura patrulaterului $ABCD$ (convex sau concav), patrulaterele de vârfuri $BPAR$, $CPAQ$ şi $DQAR$ sunt înscrise în cercurile de diametre AB, AC respectiv AD şi, împreună cu interioarele lor, acoperă interiorul triunghiului BCD. Cu atât mai mult, discurile având ca diametre segmentele AB, AC şi AD vor acoperi interiorul triunghiului BCD. □

Soluţie alternativă. Vom demonstra mai întâi următoarea: □

Lemă. *Dacă ABC este un triunghi oarecare, discurile având ca diametre laturile AB şi AC acoperă în întregime interiorul triunghiului.*

Demonstraţia lemei. Fie D proiecţia punctului A pe dreapta BC. Dacă D se află în interiorul segmentului BC, atunci interiorul tringhiului ABD este acoperit de discul de diametru AB iar interiorul tringhiului ACD este acoperit de discul de diametru AC. Dacă D se află pe semidreapta opusă semidreptei $(BC$, interiorul tringhiului ABC este acoperit de discul de diametru AC. în sfârşit, dacă D se află pe semidreapta opusă semidreptei $(CB$, interiorul tringhiului ABC este acoperit de discul de diametru AB; cu aceasta, demonstraţia lemei este completă.

Ambele cerinţe ale problemei sunt simple consecinţe ale lemei. La b), se impune tratarea separată a cazului în care interiorul triunghiului BCD nu este inclus în interiorul patrulaterului $ABCD$. □

Problema 3. *Se dau m numere naturale distincte din mulţimea $\{1; 2; ...; n\}$. Demonstraţi că putem alege câteva dintre ele, cu suma S, astfel încât*

$$0 \leq S - \frac{m(m+1)}{2} \leq n + \sqrt{2n} - m.$$

Adrian Zahariuc

Soluţie. Fie $a_1 < a_2 < ... < a_m$ cele m numere date. Notăm cu j indicele minim pentru care

$$a_1 + a_2 + ... + a_j \geq \frac{m(m+1)}{2}$$

şi cu i indicele maxim pentru care

$$a_i + a_{i+1} + ... + a_j \geq \frac{m(m+1)}{2}.$$

Notând $S = a_i + a_{i+1} + ... + a_j$, este îndeplinită prima inegalitate.

Din maximalitatea lui i, avem

$$S \leq a_i + \frac{m(m+1)}{2} - 1. \quad (1)$$

Din minimalitatea lui j, deducem că

$$a_1 + a_2 + ... + a_{j-1} < \frac{m(m+1)}{2} \leq a_i + ... + a_{j-1} + a_j \Rightarrow$$

$$a_j > a_1 + ... + a_{i-1} \geq 1 + 2 + ... + (i-1) = \frac{i(i-1)}{2}.$$

Dar $n \geq a_j$, şi prin urmare $i < \sqrt{2n} + 1$. Rezultă că

$$a_i \leq n - m + i < n - m + \sqrt{2n} + 1. \quad (2)$$

Din relaţiile (1) şi (2) obţinem că, pentru S, este îndeplinită (strict) şi a doua inegalitate din enunţ.

□

5. Ediţia a V-a - 27 august 2014

Problema 1. *Considerăm numerele complexe a, b, c, având acelaşi modul. Arătaţi că*

$$\left|\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right|+\left|\frac{a}{c}-\frac{c}{a}\right|+\left|\frac{b}{c}-\frac{c}{b}\right| \leq 3\sqrt{3}.$$

ViitoriOlimpici.ro

Soluţie. Fie $|a| = |b| = |c| = \rho$. Atunci

$$\sum\left|\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right| = \sum\left|\frac{a^2-b^2}{ab}\right| = \frac{1}{\rho^2}\sum\left|a^2-b^2\right|.$$

Se consideră punctele $A\left(a^2\right)$, $B\left(b^2\right)$ şi $C\left(c^2\right)$. Ele sunt situate pe cercul cu centrul în origine şi raza ρ^2. Relaţia din enunţ se rescrie sub forma

$$AB + BC + CA \leq 3\rho^2\sqrt{3}.$$

Vom arăta că în orice triunghi ABC, înscris în cercul de rază R, este adevărată inegalitatea

$$AB + BC + CA \leq 3R\sqrt{3}.$$

Într-adevăr, via teorema sinusurilor, relaţia precedentă revine la

$$\sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2},$$

iar aceast fapt rezultă din inegalitatea lui Jensen aplicată funcţiei concave

$$\sin : (0, \pi) \to \mathbb{R}.$$

$\square$

Problema 2. *Determinaţi numerele reale $x \in (\log_5 2, +\infty)$ cu proprietatea că*

$$(3^x + 2)^{\log_5 3} + 2 = (5^x - 2)^{\log_3 5}.$$

Gazeta Matematică 6-7-8/2014

Soluţie. Ecuaţia din enunţ se poate scrie sub forma

$$3^{\log_5(3^x+2)} + 2 = 5^{\log_3(5^x-2)}.$$

Cu notaţiile $y = \log_5(3^x + 2)$ şi $z = \log_3(5^x - 2)$, obţinem $3^y + 2 = 5^z$. Deducem că $x = \log_5(3^z + 2)$ şi $z = \log_5(3^y + 2)$. Fie funcţia

$$f : (\log_5 2, +\infty) \to (\log_5 2, +\infty),\, f(t) = \log_5\left(3^t + 2\right).$$

Atunci $f(x) = y, f(y) = z, f(z) = x$.

Funcţia f este strict crescătoare, obţinându-se prin compunere de funcţii strict crescătoare. Din considerente de simetrie circulară, putem presupune fie că $x \leq y \leq z$, fie că $x \geq y \geq z$; ne plasăm în primul caz, cel de-al doilea tratându-se similar. Rezultă că $f(x) \leq f(y) \leq f(z)$, adică $y \leq z \leq x$ şi, de aici, $x = y = z$. $\square$

Problema 3.

a) *Determinaţi* $n \in \mathbb{N}^*$, *ştiind că inegalitatea* $|\cos nx| \leq n|\cos x|$ *este adevărată pentru orice* $x \in \mathbb{R}$.

b) *Determinaţi* $x \in \mathbb{R}$, *ştiind că inegalitatea* $|\cos nx| \leq n|\cos x|$ *este adevărată pentru orice* $n \in \mathbb{N}^*$.

Gheorghe Iurea

Soluţie. Pentru $x \in \mathbb{R}$, considerăm

$$P(n) :: |\cos nx| \leq n|\cos x|.$$

Presupunând că $P(n)$ este adevărată, vom arăta că şi $P(n+2)$ este adevărată. Avem:

$$|\cos(n+2)x| = |\cos nx \cdot \cos 2x - \sin nx \cdot \sin 2x| \leq$$
$$\leq |\cos nx| \cdot |\cos 2x| + 2|\sin x| \cdot |\cos x| \cdot |\sin nx| \leq$$
$$\leq |\cos nx| + 2|\cos x| \leq n|\cos x| + 2|\cos x| = (n+2)|\cos x|.$$

a) Pentru n par, $P(n)$ nu poate fi adevărată pentru orice $x \in \mathbb{R}$; de exemplu, pentru $x = \frac{\pi}{2}$, am obţine $1 \leq 0$, fals. Cum $P(1)$ este adevărată (cu egalitate) pentru orice $x \in \mathbb{R}$, rezultă că $P(n)$ este adevărată pentru n impar, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

b) $P(n)$ este adevărată oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$ pentru acele valori ale lui x pentru care este adevărată $P(2)$; avem deci de rezolvat inecuaţia $|\cos 2x| \leq 2|\cos x|$. Notând $c = |\cos x| \in [0,1]$, aceasta revine la $-2c \leq 2c^2 - 1 \leq 2c, : c \in [0,1]$. Deducem că $c \in \left[\frac{\sqrt{3}-1}{2}, 1\right]$. În final, obţinem soluţiile

$$x \in \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \left[n\pi - \arccos\frac{\sqrt{3}-1}{2}, n\pi + \arccos\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right].$$

□

6. Ediţia a VI-a - 20 august 2015

Problema 1. *Notăm cu* $\mathcal{F}$ *mulţimea funcţiilor* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *cu proprietatea că*

$$f(f(x) + y) = f(x) + f(y),$$

oricare ar fi numerele reale x *şi* y.

a) *Determinaţi funcţiile injective din* $\mathcal{F}$.

b) *Determinaţi funcţiile surjective din* $\mathcal{F}$.

ViitoriOlimpici.ro

Soluţie. *a*) Relaţia din ipoteză conduce la $f(f(x)+y) = f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$ şi $f(f(y)+x) = f(y) + f(x), \forall x, y \in \mathbb{R}$. Obţinem imediat că

$$f(f(x)+y) = f(f(y)+x), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Deoarece f este injectivă, rezultă că

$$f(x) + y = f(y) + x \iff f(x) - x = f(y) - y, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Considerăm funcţia $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g(t) = f(t) - t$. Funcţia g verifică relaţia $g(x) = g(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$, aşadar există $a \in \mathbb{R}$ pentru care $g(x) = a, \forall x \in \mathbb{R}$.

În concluzie, funcţiile căutate sunt cele de forma

$$f(x) = x + a, \forall x \in \mathbb{R}$$

şi se verifică faptul că aceste funcţii sunt soluţii ale problemei.

b) Fie f o funcţie surjectivă din $\mathcal{F}$; vom arăta că f este şi injectivă. Pentru aceasta, fie $a, b \in \mathbb{R}$ pentru care $f(a) = f(b)$. Din ipoteză, avem că

$$f(f(x)) = f(x) + f(0), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Există $c, d \in \mathbb{R}$ pentru care $f(c) = a$ şi $f(d) = b$. Înlocuind $x = c$, apoi $x = d$ în relaţia anterioară, obţinem $f(a) = a + f(0)$, respectiv $f(b) = b + f(0)$. Din $f(a) = f(b)$ rezultă că $a + f(0) = b + f(0)$, deci $a = b$.

Prin urmare, funcţiile surjective sunt injective şi regăsim soluţiile de la punctul anterior. □

Problema 2. *Considerăm două numere complexe u şi v, având acelaşi modul, pentru care există a, b, c şi d numere reale strict pozitive astfel încât* $\max\{a, b, c\} < d$*,* $a + d = b + c$ *şi*

$$|au + dv| \leq |bu + cv|.$$

Demonstraţi că $u = v$.

Gazeta Matematică 6-7-8/2015

Soluţie. Ultima relaţie din ipoteză se scrie succesiv:

$$\begin{aligned}
& |au + dv|^2 \leq |bu + cv|^2 \\
\Leftrightarrow\quad & (au + dv)(a\overline{u} + d\overline{v}) \leq (bu + cv)(b\overline{u} + c\overline{v}) \\
\Leftrightarrow\quad & \left(a^2 + d^2\right)|u|^2 + ad\left(u\overline{v} + \overline{u}v\right) \leq \left(b^2 + c^2\right)|u|^2 + bc\left(u\overline{v} + \overline{u}v\right) \\
\Leftrightarrow\quad & (a + d)^2|u|^2 - 2ad|u|^2 + ad\left(u\overline{v} + \overline{u}v\right) \leq (b + c)^2|u|^2 - 2bc|u|^2 + bc\left(u\overline{v} + \overline{u}v\right) \\
\Leftrightarrow\quad & ad\left(u\overline{v} + \overline{u}v - 2|u|^2\right) \leq bc\left(u\overline{v} + \overline{u}v - 2|u|^2\right) \\
\Leftrightarrow\quad & (ad - bc)\left(u\overline{v} + \overline{u}v - |u|^2 - |v|^2\right) \leq 0 \\
\Leftrightarrow\quad & (bc - ad)|u - v|^2 \leq 0
\end{aligned}$$

Pe de altă parte, este adevărată inegalitatea $bc > ad$. Într-adevăr, putem presupune $b \leq c$ şi, cum $d - c = b - a \overset{not}{=} r > 0$, avem:

$$ad = (c + r)(b - r) = bc - r(c - b) - r^2 < bc.$$

Rezultă astfel că $|u - v|^2 = 0$ şi, de aici, concluzia problemei. □

Soluţie alternativă. Notăm $k = \frac{d}{a+d}$ şi $l = \frac{c}{b+c}$; relaţia din enunţ se poate scrie sub forma

$$(1) \quad |(1 - k)u + kv| \leq |(1 - l)u + lv|.$$

Presupunem, prin absurd, că $u \neq v$. În planul complex de origine $O(0)$, considerăm punctele (distincte, conform presupunerii asumate!) $A(u), B(v), M((1 - k)u + kv)$ şi $N((1 - l)u + lv)$. Evident, punctele M şi N sunt interioare segmentului AB. În plus, deoarece $k > l$ şi $k > 1 - l$, punctul N este situat între punctele M şi M', unde M' este simetricul lui M faţă de mijlocul segmentului AB. Rezultă că $OM > ON$, prin urmare (2) $\quad |(1 - k)u + kv| > |(1 - l)u + lv|$ .Relaţiile (1) şi (2) fiind contradictorii, rămâne adevărată concluzia problemei. □

Problema 3. *Demonstraţi că singurul număr natural $n \geq 2$ cu proprietatea că*

$$\sqrt{a+\sqrt{b+\sqrt{c}}} \geq \sqrt[n]{abc},$$

oricare ar fi numerele reale nenegative a, b şi c, este $n = 14$.

Gabriel Popa & Paul Georgescu

Soluţie. Pentru început, demonstrăm valabilitatea inegalităţii pentru cazul $n = 14$. Formula de dezvoltare a binomului conduce la

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{n-k} y^k \geq C_n^{n-1} x y^{n-1} = nxy^{n-1}, \forall x, y \in [0, \infty), \forall n \geq 2.$$

Avem:

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{a+\sqrt{b+\sqrt{c}}}\right)^{14} &= \left(a+\sqrt{b+\sqrt{c}}\right)^7 \geq 7a\left(\sqrt{b+\sqrt{c}}\right)^6 \\ &= 7a\left(b+\sqrt{c}\right)^3 \geq 21abc \geq abc, \end{aligned}$$

de unde obţinem

$$\sqrt{a+\sqrt{b+\sqrt{c}}} \geq \sqrt[14]{abc}, \forall a, b, c \in [0, \infty).$$

Demonstrăm acum că, oricare ar fi $n \geq 2$,$n \neq 14$, există valori $a, b, c \in [0, \infty)$ pentru care inegalitatea din enunţ este falsă. Considerând $a = x^2$, $b = x^4$ şi $c = x^8$, unde $x \geq 0$, un număr n care are proprietatea dorită trebuie să verifice inegalitatea

$$(\star) \quad x\sqrt{1+\sqrt{2}} \geq x^{\frac{14}{n}}, \forall x \in [0, \infty).$$

Dacă $n < 14$, relaţia $(\star)$ conduce la

$$\left(\sqrt{1+\sqrt{2}}\right)^{\frac{n}{14-n}} \geq x, \forall x \in (0, \infty),$$

ceea ce nu este posibil (valorile mari ale lui x conduc la contradicţii). Dacă $n > 14$, relaţia $(\star)$ conduce la

$$x^{\frac{n-14}{n}} \geq \sqrt{\sqrt{2}-1}, \forall x \in (0, \infty),$$

fapt care, din nou, nu este adevărat (valorile apropiate de 0 ale lui x conduc la contradicţii). □