Problema 2. Numerele raţionale a, b, c, d satisfac egalităţile

$$(a+b)(c+d) = (a+c)(b+d) = (a+d)(b+c).$$

Demonstraţi că cel puţin trei dintre numerele a, b, c, d sunt egale.

Olimpiadă Polonia, 2014

Soluţie

Egalitatea $(a+b)(c+d) = (a+c)(b+d)$ se scrie $ac+bd = ab+cd$, adică $a(c-b) - d(c-b) = 0$, deci $(a-d)(b-c) = 0$. Deducem că fie $a = d$, fie $b = c$.

Similar, egalitatea $(a+c)(b+d) = (a+d)(b+c)$ revine la $(a-b)(c-d) = 0$, adică la $a = b$ sau $c = d$.

Dacă $a = d$, atunci relaţiile de mai sus arată că avem fie $a = b = d$, fie $a = c = d$.

Dacă $b = c$, atunci relaţiile de mai sus arată că fie $a = b = c$, fie $b = c = d$.

În concluzie, în oricare din cazuri, cel puţin trei dintre numerele a, b, c, d sunt egale.

Remarcă: Este suficient ca trei dintre numere să fie egale pentru ca egalităţile din enunţ să fie satisfăcute. De exemplu, dacă trei dintre numere sunt egale cu x, iar cel de-al patrulea este y, atunci $(a+b)(c+d) = (a+c)(b+d) = (a+d)(b+c) = 2x^2+2xy$.