

Puncte limită ale unui șir de numere reale

Lect.dr. M.Chis
Universitatea de Vest din Timișoara

Viitori Olimpici ediția a 9-a, etapa a 2-a, clasa a XI-a

Definiție 1. Fie $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un șir de numere reale și $l \in \overline{\mathbb{R}}$. l se numește punct limită al șirului (x_n) dacă există un subșir $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ al șirului (x_n) astfel încât $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = l$.

Notăție 2. Notăm cu $\mathcal{L}(x_n) = \{l \in \overline{\mathbb{R}} \mid l \text{ punct limită al șirului } (x_n)\}$ mulțimea punctelor limită ale șirului $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Observație 3. Pentru orice șir $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$, mulțimea $\mathcal{L}(x_n)$ este nevidă:
Dacă șirul este nemărginit, atunci $\mathcal{L}(x_n) \cap \{-\infty, \infty\} \neq \emptyset$, iar dacă șirul este mărginit, atunci conform lemei lui Cesaro, există un subșir al său care este convergent.

Observație 4. Condiția necesară și suficientă ca un șir $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ să aibă limită este ca mulțimea punctelor sale limită să se reducă la un singur punct: $|\mathcal{L}(x_n)| = 1$.

În continuare vom da câteva caracterizări ale punctelor limită ale unui șir.

Propoziție 5. $l \in \mathcal{L}(x_n) \iff (\forall)V \in \mathcal{V}(l)(\forall)m \in \mathbb{N}(\exists)n > m : x_n \in V$.

Demonstrație. Pentru $l \in \mathcal{L}(x_n)$, fie $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ un subșir al șirului $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ având limita l . Atunci pentru orice vecinătate $V \in \mathcal{V}(l)$ există un rang $k_V \in \mathbb{N}$ astfel încât $x_{n_k} \in V$ pentru orice $k \geq k_V$. Cum șirul $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ este un strict crescător, există un termen al său n_{k_0} care este mai mare decât m . Pentru orice $k \geq \max(k_0, k_V)$ au loc atunci relațiile $x_{n_k} \in V$ și $n_k > m$.

Reciproc, dacă $l \in \overline{\mathbb{R}}$ verifică condiția $(\forall)V \in \mathcal{V}(l)(\forall)m \in \mathbb{N}(\exists)n > m : x_n \in V$, vom considera, șirurile de vecinătăți $(V_k)_{k \in \mathbb{N}}$ și de numere $(m_k)_{k \in \mathbb{N}}$ și $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ definite prin

$$V_k = \begin{cases} \left(l - \frac{1}{k+1}, l + \frac{1}{k+1} \right) & , \text{ pentru } l \in \mathbb{R}, \\ (k, \infty) & , \text{ pentru } l = \infty, \\ (-\infty, -k) & , \text{ pentru } l = -\infty, \end{cases}$$

$m_0 = 0$, $n_k = \min\{n \in \mathbb{N} \mid n > m_k, x_{n_k} \in V_k\}$, $m_{k+1} = n_k$. Atunci $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ are limita l , astfel că $l \in \mathcal{L}(x_n)$. \square

Corolar 6. $l \in \mathcal{L}(x_n) \iff [(\forall)V \in \mathcal{V}(l) \implies |\{n \in \mathbb{N} \mid x_n \in V\}| = \infty]$.

Definiție 7. O mulțime $A \subseteq \mathbb{R}$ se numește *închisă* dacă își conține punctele de acumulare: $A' \subseteq A$.

Propoziție 8. Pentru orice șir $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$, mulțimea $\mathcal{L}(x_n)$ a punctelor sale limită este închisă.

Demonstrație. Fie $a \in \mathcal{L}(x_n)'$ un punct de acumulare oarecare al mulțimii $\mathcal{L}(x_n)$ a punctelor limită ale unui șir $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$. Pentru orice vecinătate $V \in \mathcal{V}(a)$ există $W \in \mathcal{V}(a)$ cu proprietatea că $W \subseteq V$ și $W \in \mathcal{V}(y)$, $(\forall)y \in W$. Cum $a \in \mathcal{L}(x_n)'$, există $l \in \mathcal{L}(x_n) \cap W \setminus \{a\}$. Cum $W \in \mathcal{V}(l)$, rezultă că $|\{n \in \mathbb{N} \mid x_n \in W\}| = \infty$. Dar atunci, deoarece $W \subseteq V$, avem și că $|\{n \in \mathbb{N} \mid x_n \in V\}| = \infty$. Prin urmare, $a \in \mathcal{L}(x_n)$. Mulțimea $\mathcal{L}(x_n)$ este închisă. \square

Definiție 9. Fie $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ un șir de numere reale. Limita superioară a șirului (x_n) este

$$\limsup x_n \stackrel{\text{not}}{=} \overline{\lim} x_n = \sup(\mathcal{L}(x_n)),$$

iar limita inferioară a șirului (x_n) este

$$\liminf x_n \stackrel{\text{not}}{=} \underline{\lim} x_n = \inf(\mathcal{L}(x_n)).$$

Limitele superioară și inferioară ale unui șir se mai numesc limitele extreme ale șirului.

Observație 10. Pentru orice șir $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ are loc relația

$$\mathcal{L}(x_n) \subseteq [\underline{\lim} x_n, \overline{\lim} x_n].$$

Observație 11. Dacă $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ este un șir mărginit de numere reale, avem că $(\forall) \varepsilon > 0 (\exists) n_\varepsilon \in \mathbb{N} : x_n \in (\underline{\lim} x_n - \varepsilon, \overline{\lim} x_n + \varepsilon), (\forall) n \geq n_\varepsilon$.

Propoziție 12. Condiția necesară și suficientă ca un șir $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ să aibă limită este $\underline{\lim} x_n = \overline{\lim} x_n$.

Propoziție 13. Condiția necesară și suficientă ca un șir mărginit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ să fie convergent este ca $\overline{\lim} x_n - \underline{\lim} x_n < \varepsilon, (\forall) \varepsilon > 0$.

Limitele extreme mai admit și următoarele caracterizări:

Propoziție 14. $\overline{\lim} x_n = \inf_{n \in \mathbb{N}} \sup\{x_k | k > n\}, \underline{\lim} x_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} \inf\{x_k | k > n\}$.

În inegalități între șiruri se poate trece la limită inferioară, respectiv superioară.

Propoziție 15. Fie $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ două șiruri cu proprietatea că $(\exists) n_0 \in \mathbb{N} : x_n \leq y_n, (\forall) n \geq n_0$. Atunci $\underline{\lim} x_n \leq \underline{\lim} y_n$ și $\overline{\lim} x_n \leq \overline{\lim} y_n$.

Demonstrație. Fie $\alpha < \underline{\lim} x_n$ oarecare. Atunci există $n_1 \in \mathbb{N}$ astfel încât $x_n > \alpha, (\forall) n \geq n_1$. Pentru $n \geq \max(n_0, n_1)$ rezultă atunci că $y_n > \alpha$. Prin urmare, $\alpha \leq \underline{\lim} y_n$. Rezultă că $\underline{\lim} x_n \leq \underline{\lim} y_n$. Analog se arată și inegalitatea $\overline{\lim} x_n \leq \overline{\lim} y_n$. \square

În legătură cu operații cu șiruri, mulțimile punctelor limită verifică următoarele proprietăți:

Propoziție 16. Fie $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ două șiruri de numere reale. Atunci au loc relațiile:

- $\mathcal{L}\left(\frac{1}{x_n}\right) = \frac{1}{\mathcal{L}(x_n)}$;
- $\mathcal{L}(x_n + y_n) \subseteq \mathcal{L}(x_n) + \mathcal{L}(y_n)$;
- $\mathcal{L}(x_n \cdot y_n) \subseteq \mathcal{L}(x_n) \cdot \mathcal{L}(y_n)$.

Demonstrație. a) Avem că $l \in \mathcal{L}(x_n) \iff (\exists) (n_k)_{k \in \mathbb{N}} : x_{n_k} \rightarrow l \iff \frac{1}{x_{n_k}} \rightarrow \frac{1}{l} \iff \frac{1}{l} \in \mathcal{L}\left(\frac{1}{x_n}\right)$. Rezultă că $\frac{1}{\mathcal{L}(x_n)} = \mathcal{L}\left(\frac{1}{x_n}\right)$.

b) Fie $l \in \mathcal{L}(x_n + y_n)$ oarecare. Înseamnă că există un șir strict crescător $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ astfel încât $x_{n_k} + y_{n_k} \rightarrow l$. Fie $l_1 \in \mathcal{L}(x_{n_k})$. Atunci există un șir $(k_m)_{m \in \mathbb{N}}$ cu $x_{n_{k_m}} \rightarrow l_1$. Dacă $l_2 \in \mathcal{L}(y_{n_{k_m}})$, atunci $l_1 + l_2 = l$, și rezultă că $l \in \mathcal{L}(x_n) + \mathcal{L}(y_n)$. Obținem că $\mathcal{L}(x_n + y_n) \subseteq \mathcal{L}(x_n) + \mathcal{L}(y_n)$.

c) Se demonstrează analog cu b). \square

Corolar 17. Fie $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ două șiruri de numere reale. Atunci:

- $\underline{\lim} x_n + \underline{\lim} y_n \leq \underline{\lim} (x_n + y_n) \leq \overline{\lim} (x_n + y_n) \leq \overline{\lim} x_n + \overline{\lim} y_n$.
- Dacă $x_n, y_n > 0, (\forall) n \in \mathbb{N}$, atunci $\underline{\lim} x_n \cdot \underline{\lim} y_n \leq \underline{\lim} (x_n \cdot y_n) \leq \overline{\lim} (x_n \cdot y_n) \leq \overline{\lim} x_n \cdot \overline{\lim} y_n$.
- Dacă $x_n > 0, (\forall) n \in \mathbb{N}$, atunci $\underline{\lim} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{\overline{\lim} x_n}$ și $\overline{\lim} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{\underline{\lim} x_n}$.

Demonstrație. Pentru orice mulțimi de numere reale $A, B \subseteq \mathbb{R}$ au loc proprietățile:

$$A \subseteq B \implies \inf(B) \leq \inf(A), \sup(A) \leq \sup(B),$$

$$\inf(A + B) = \inf(A) + \inf(B), \sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B).$$

$$A \subseteq (0, \infty) \implies \inf(A) = \sup \frac{1}{A}, \sup(A) = \inf \frac{1}{A}.$$

a) Rezultă că $\underline{\lim} x_n + \underline{\lim} y_n = \inf(\mathcal{L}(x_n)) + \inf(\mathcal{L}(y_n)) = \inf(\mathcal{L}(x_n) + \mathcal{L}(y_n)) \leq \inf(\mathcal{L}(x_n + y_n)) = \underline{\lim} (x_n + y_n)$ și $\overline{\lim} (x_n + y_n) = \sup(\mathcal{L}(x_n + y_n)) \leq \sup(\mathcal{L}(x_n) + \mathcal{L}(y_n)) = \sup(\mathcal{L}(x_n)) + \sup(\mathcal{L}(y_n)) = \overline{\lim} x_n + \overline{\lim} y_n$.

Analog se arată și b), respectiv c). \square