COMENTARII FAZA LOCALĂ 2013, BUCUREŞTI

Abstract. Comments on some of the problems presented at the Local Round of the National Mathematics Olympiad 2013, Bucharest.
Data: 12 februarie 2013.
Autor: Dan Schwarz, Bucureşti.

1. Introducere

Aceste comentarii asupra Fazei Locale a Olimpiadei de Matematică 2013, Bucureşti, reflectă, ca de obicei, opinia personală a autorului. Ele sunt adăugate la o prezentare selectată a probelor de concurs.[1]

Voi indica prin culoarea roşie eventualele erori, sau notaţiile abuzive din enunţurile originale, şi prin culoarea verde varianta de preferat (sau care lipsea din enunţ sau soluţie). Voi folosi în mod predilect şi culoarea albastră pentru comentariile de natură personală.

2. Clasa a IX-a

Subiectul (1). *a) Un şir de numere reale $(a_n)_{n\geq 1}$ are proprietatea*

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 2^n + 1$$

pentru orice $n \geq 1$. Stabiliţi dacă şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este progresie geometrică.

b) Fie A_1, A_2 două puncte distincte **într-un** **în** *plan. O lăcustă sare pe acest plan din A_1 în A_2, apoi continuă să sară, astfel încât lungimea fiecărei sărituri este de două ori mai mare decât cea precedentă. Poate să se întoarcă lăcusta vreodată în punctul A_1? (Justificare)*

Prelucrare Ovidiu Şontea

Soluţie. a) Se obţine imediat $a_1 = 3$ şi $a_n = 2^{n-1}$ pentru $n \geq 2$, deci şirul nu este progresie geometrică (deşi şirul $(a_n)_{n\geq 2}$ este!).

b) Să presupunem că acest lucru este posibil în $n \geq 2$ sărituri. Suma lungimilor tuturor săriturilor, mai puţin ultima, va fi $(2^{n-1} - 1)A_1A_2$, în timp ce lungimea ultimei sărituri este $2^{n-1}A_1A_2$, dar atunci linia poligonală formată din capetele săriturilor nu se poate închide. □

Subiectul (2). *Să se determine mulţimile nevide $A \subset \mathbb{R}^*$ cu proprietăţile*

a) mulţimea A are cel mult cinci elemente;

b) pentru orice $x \in A$ avem şi $\dfrac{1}{x} \in A$ şi $1 - x \in A$.

Marcel Ţena

[1] Lipsesc unele probleme, la care nu am găsit interesul de a fi prezentate.

Soluţie. Se vede imediat că, pentru $x \in A$, toate expresiile derivate prin aplicarea iterată a funcţiilor $t \mapsto \frac{1}{t}$ şi $t \mapsto 1-t$ sunt

$$x,\ \frac{1}{x},\ 1-x,\ \frac{1}{1-x},\ \frac{x-1}{x},\ \frac{x}{x-1}.$$

Deoarece A conţine cel mult cinci elemente, trebuie ca măcar două dintre aceste expresii să fie egale, şi printr-o cercetare exhaustivă a cazurilor posibile se obţine $x \in \{-1, 2, 1/2\}$ (evident, $x = 1$ este interzis).

De fapt, aceste expresii reprezintă valorile posibile ale unui biraport, obţinut considerând patru puncte colineare, desemnate A, B, C, D, şi apoi calculând $(A, B; C, D) = \frac{AC}{AD} : \frac{BC}{BD}$ (ca rapoarte de segmente direcţionate) pentru toate permutările literelor care desemnează cele patru puncte. Unicul caz când se obţin valori egale este pentru cazul unei diviziuni **armonice**, când unul dintre birapoarte are valoarea -1, iar celelalte valori posibile sunt 2 şi 1/2. □

Subiectul (3)**.** *Să se determine cel mai mare număr natural* **nenul** *n pentru care există numerele reale strict pozitive $x_1, x_2, \ldots, x_n$ astfel încât*

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = n$$

şi

$$\frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_2} + \cdots + \frac{1}{1+x_n} = \frac{4n-6}{n}.$$

Vasile Berghea, *G.M.-B. nr. 4/2012*

Soluţie. O simplă aplicare a inegalităţii Cauchy-Schwarz (pentru care este suficient ca $x_k > -1$ pentru orice $1 \le k \le n$) oferă

$$2n \cdot \frac{4n-6}{n} = \left(\sum_{k=1}^{n}(1+x_k)\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+x_k}\right) \ge n^2,$$

de unde $n^2 \le 8n - 12$, deci $n \le 6$. Cum pentru $n = 6$ avem chiar egalitate, acest caz se realizează pentru $x_k = 1$, $1 \le k \le 6$. □

Subiectele clasei a IX-a au fost deosebit de uşoare, de nivelul unei teze medii; mai mult – din păcate – de o banalitate descurajantă.

3. Clasa a X-a

Subiectul (1)**.** *Să se arate că imaginea funcţiei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dată prin*

$$f(x) = \sqrt[3]{1+2^x} + \sqrt[3]{1-2^x}$$

este inclusă în intervalul $(0, 2)$.

* * *

Soluţie. Evident, este suficient să se studieze funcţia $g\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ dată prin $g(t) = \sqrt[3]{1+t} + \sqrt[3]{1-t}$, datorită substituţiei $2^x = t$. Simple calcule algebrice arată că $0 < g(t) < 2$ pentru orice $t > 0$, dar pentru cei care ştiau deja metode de analiză reală, derivata funcţiei este

$$g'(t) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{(1+t)^2}} - \frac{1}{\sqrt[3]{(1-t)^2}}\right) < 0,$$

deci funcţia este descrescătoare. Deoarece $\lim\limits_{t\to 0}\left(\sqrt[3]{1+t} + \sqrt[3]{1-t}\right) = 2$ şi $\lim\limits_{t\to\infty}\left(\sqrt[3]{1+t} + \sqrt[3]{1-t}\right) = \lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{2}{\sqrt[3]{(1+t)^2} - \sqrt[3]{1-t^2} + \sqrt[3]{(1-t)^2}} = 0$, reiese că imaginea funcţiei este **chiar** intervalul $(0,2)$. □

Subiectul (2)**.** *Fie a,b,x,y numere reale din intervalul $(1,\infty)$.*
Să se demonstreze că

$$(\lg x)\cdot(\log_a x) + (\lg y)\cdot(\log_b y) \geq (\lg xy)(\log_{ab} xy).$$

* * *

Soluţie. Folosind relaţiile de transformare a bazei logaritmilor, relaţia dată se scrie

$$\frac{\lg^2 x}{\lg a} + \frac{\lg^2 y}{\lg b} \geq \frac{\lg^2 xy}{\lg ab} = \frac{(\lg x + \lg y)^2}{\lg a + \lg b},$$

care este ”celebra variantă Titu” a inegalităţii Cauchy-Schwarz. □

Subiectul (3)**.** *Fie A,B,C trei puncte distincte în planul complex, şi a,b,c afixele acestora. Să se arate că triunghiul ABC este echilateral dacă şi numai dacă*

$$\frac{a-b}{\overline{a}-\overline{b}} + \frac{b-c}{\overline{b}-\overline{c}} + \frac{c-a}{\overline{c}-\overline{a}} = 0.$$

Marian Cucoaneş, *G.M.-B. nr. 12/2012*

Soluţie. Deoarece $c-a = (c-b)+(b-a)$, relaţia dată se mai scrie şi

$$(a-b)(\overline{b}-\overline{c})(\overline{c-a} - \overline{a-b}) = (b-c)(\overline{a}-\overline{b})(\overline{b-c} - \overline{c-a}),$$

de unde, prin luarea modulelor şi conjugare,

$$\left|\frac{a+b+c}{3} - a\right| = \left|\frac{a+b+c}{3} - c\right|,$$

şi evident aceeaşi valoare şi pentru $\left|\dfrac{a+b+c}{3} - b\right|$. Deoarece $\dfrac{a+b+c}{3}$ este afixul centroidului triunghiului ABC, relaţiile de mai sus arată că acest punct este şi circumcentru, deci $\triangle ABC$ este echilateral. Implicaţia inversă este trivială. □

Subiectul (4)**.** *a) Considerăm mulţimea* $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$*. Să se arate că funcţia* $f\colon D \to \mathbb{C}$ *dată prin*

$$f(z) = z^2 - 2|z|$$

este injectivă.

b) Să se arate că funcţia $g\colon \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ *dată prin*

$$g(n) = \textit{numărul cuburilor perfecte din intervalul } [n^3, 3n^3]$$

este surjectivă.

Eugen Radu

Soluţie. De interes este doar punctul b). Avem $g(n) = \lfloor n\sqrt[3]{3}\rfloor - n + 1$ pentru orice $n \geq 1$, de unde şi $g(1) = 1$. Dar atunci $g(n+1) - g(n) = \lfloor n\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{3}\rfloor - \lfloor n\sqrt[3]{3}\rfloor - 1 \geq \lfloor n\sqrt[3]{3} + 1\rfloor - \lfloor n\sqrt[3]{3}\rfloor - 1 = 0$ şi de asemenea $g(n+1) - g(n) = \lfloor n\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{3}\rfloor - \lfloor n\sqrt[3]{3}\rfloor - 1 \leq \lfloor n\sqrt[3]{3} + 2\rfloor - \lfloor n\sqrt[3]{3}\rfloor - 1 = 1$, deci funţia g este crescătoare, cu pasul 0 sau 1. Deoarece $g(n) = \lfloor n\sqrt[3]{3}\rfloor - n + 1 > n(\sqrt[3]{3} - 1) \to \infty$, rezultă că valorile funcţiei trec prin toate numerele naturale nenule. □

Şi subiectele clasei a X-a au fost uşoare; singura dificultate fiind de a găsi argumentul simplu de la punctul b) al subiectului 4.

4. Clasa a XI-a

Subiectul (1)**.** *Se consideră şirurile de numere reale* $(a_n)_{n\geq 1}$*,* $(b_n)_{n\geq 1}$ *şi* $(c_n)_{n\geq 1}$ *definite prin*

$$a_1 > 0,\ b_1 > 0,\ a_{n+1} = a_n + 2b_n,\ b_{n+1} = a_n + b_n,\ c_n = \frac{a_n}{b_n}$$

oricare ar fi n natural nenul.

a) Să se arate că $\left|c_{n+1} - \sqrt{2}\right| \leq \frac{1}{2}\left|c_n - \sqrt{2}\right|$*, oricare ar fi n natural nenul.*

b) Să se arate că dacă şirul $(c_n)_{n\geq 1}$ *este monoton, atunci el este constant.*

Prelucrare Ovidiu Şontea

Soluţie. Soluţia oficială este puţin cam obscură. Mult mai clar este după cum urmează.

$$c_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} - \sqrt{2} = \frac{(a_n + 2b_n) - (a_n + b_n)\sqrt{2}}{a_n + b_n} = \left(1 - \sqrt{2}\right)\frac{a_n - b_n\sqrt{2}}{a_n + b_n}$$

$$= \left(1 - \sqrt{2}\right)\frac{b_n}{a_n + b_n} \cdot \frac{a_n - b_n\sqrt{2}}{b_n} = \left(1 - \sqrt{2}\right)\frac{b_n}{a_n + b_n}\left(c_n - \sqrt{2}\right).$$

Dar din condiţiile problemei rezultă imediat că $a_n > 0,\ b_n > 0$, oricare ar fi n natural nenul, şi deoarece atunci $\left(\sqrt{2} - 1\right)\frac{b_n}{a_n + b_n} < \frac{1}{2} \cdot \frac{b_n}{a_n + b_n} < \frac{1}{2}$, rezultă punctul a).

Dar rezultă şi că $c_n - \sqrt{2}$ şi $c_{n+1} - \sqrt{2}$ sunt de semne contrare, oricare ar fi n natural nenul, deci dacă $c_1 \neq \sqrt{2}$ şirul $(c_n)_{n\geq 1}$ alternează în jurul valorii $\sqrt{2}$, deci nu poate fi monoton, în timp ce pentru $c_1 = \sqrt{2}$ şirul este constant egal cu $\sqrt{2}$ (deci monoton), ceea ce rezolvă punctul b). Desigur, din inegalitatea de la punctul a) rezultă imediat că $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \sqrt{2}$, deci şirul $(c_n)_{n\geq 1}$ este convergent, cu limita $\sqrt{2}$. $\square$

Soluţie Alternativă. Avem

$$c_{n+1} = \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} = \frac{a_n + 2b_n}{a_n + b_n} = 1 + \frac{1}{1 + \dfrac{a_n}{b_n}} = 1 + \frac{1}{1 + c_n},$$

deci $c_{n+1} = f(c_n)$, unde $f\colon (0,\infty) \to (1,2)$, dată de $f(x) = 1 + \dfrac{1}{1+x}$, este strict descrescătoare, iar ecuaţia $f(x) = x$ are ca unică soluţie $x = \sqrt{2}$.

a) Acum, pentru $x > 0$ avem

$$\left|f(x) - \sqrt{2}\right| = \left|1 + \frac{1}{1+x} - \sqrt{2}\right| = \left|\frac{1-\sqrt{2}}{1+x}(x - \sqrt{2})\right| \leq \frac{1}{2}\left|x - \sqrt{2}\right|,$$

căci $\sqrt{2} - 1 < \dfrac{1}{2}$ and $\dfrac{1}{1+x} < 1$.

b) Din cele spuse mai sus despre f, rezultă deci că $0 < x < \sqrt{2}$ implică $f(x) > f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$, iar $x > \sqrt{2}$ implică $0 < f(x) < f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$. Rezultă că dacă $c_1 \neq \sqrt{2}$ şirul $(c_n)_{n\geq 1}$ alternează în jurul valorii $\sqrt{2}$, deci nu poate fi monoton, în timp ce pentru $c_1 = \sqrt{2}$ şirul este constant egal cu $\sqrt{2}$ (deci monoton). $\square$

Subiectul (2)**.** *Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ un şir de numere reale şi $A_n = \max\limits_{1\leq k\leq n} a_k$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.*

a) Să se studieze convergenţa şirului $(A_n x_n)_{n\geq 1}$ în cazul

$$a_n = n^2 + n + (-1)^n(n^2 - n),\ x_n = \frac{1}{na_n} \text{ pentru orice } n \geq 1.$$

b) Să se arate că, dacă $(x_n)_{n\geq 1}$ este un şir descrescător astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} a_n x_n = 0$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} A_n x_n = 0$.

George Stoica

Soluţie. Punctul a) este trivial, căci avem $a_n = A_n = 2n^2$ pentru n par, şi $a_n = 2n$, $A_n = 2(n-1)^2$ pentru $n > 1$ impar. Atunci $A_n x_n = \dfrac{1}{n}$ pentru n par, şi $A_n x_n = (1 - 1/n)^2$ pentru $n > 1$ impar, deci subşirul de indici pari converge la 0, în timp ce subşirul de indici impari converge la 1, aşadar şirul $(A_n x_n)_{n\geq 1}$ **nu** este convergent. Singurul merit al acestui punct este să arate că cerinţa ca şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ de la punctul b) să fie descrescător este instrumentală.

Punctul b) este tratat mult prea complicat, şi cu o esenţială omisiune, provenită din lipsa utilizării valorilor absolute. Şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ poate conţine termeni negativi, dar atunci, în notaţiile folosite $i_m \leq n < i_{m+1}$, şi cu $A_n = a_{i_m}$, nu putem afirma că $A_n x_n = a_{i_m} x_n \leq a_{i_m} x_{i_m}$, căci deşi avem $0 \leq x_n \leq x_{i_m}$, am putea avea $a_{i_m} < 0$ (pentru valori ale lui n pentru care $A_n < 0$). Desigur, suntem în subcazul unde şirul $(A_n)_{n\geq 1}$ este crescător, cu limita $+\infty$, deci de la un rang încolo obiecţia de mai sus nu mai poate fi adusă, dar acest lucru nu este în mod clar identificat în soluţia oficială.

Soluţia recomandată este după cum urmează. Deoarece şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este dat descrescător şi cu limita 0, rezultă $x_n \geq 0$ pentru orice $n \geq 1$. Fie k_n cel mai mic indice $1 \leq k \leq n$ pentru care $A_n = a_k$; şirul $(k_n)_{n\geq 1}$ este deci crescător.

• Dacă şirul $(k_n)_{n\geq 1}$ este mărginit, atunci el este format dintr-un număr finit de valori naturale nenule, deci există M astfel încât $|a_{k_n}| \leq M$ pentru orice $n \geq 1$. Dar $0 \leq |A_n x_n| = |a_{k_n} x_n| = |a_{k_n}| x_n \leq M x_n$, iar $\lim\limits_{n\to\infty} M x_n = M \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} |A_n x_n| = 0$, şi prin urmare $\lim\limits_{n\to\infty} A_n x_n = 0$.

• Dacă şirul $(k_n)_{n\geq 1}$ este nemărginit, atunci $0 \leq |A_n x_n| = |a_{k_n} x_n| = |a_{k_n}| x_n \leq |a_{k_n}| x_{k_n} = |a_{k_n} x_{k_n}|$, iar $\lim\limits_{n\to\infty} a_{k_n} x_{k_n} = 0$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} |A_n x_n| = 0$, şi prin urmare $\lim\limits_{n\to\infty} A_n x_n = 0$. $\square$

Subiectul (3)**.** *a) Să se arate că, dacă n este un număr natural nenul, atunci pentru orice două matrice $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ are loc* $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$, *unde* $\operatorname{tr}(X)$ *desemnează suma elementelor de pe diagonala prin**i**cipală a matricei pătrate X (***urma** *matricei X).*

b) Determinaţi toate perechile de numere reale (x, y) pentru care există două matrice $A, B \in \mathcal{M}_2(R)$ $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât

$$AB = \begin{pmatrix} x & 60 \\ 2 & y \end{pmatrix} \text{ şi } BA = \begin{pmatrix} 10 & 30 \\ 4 & 20 \end{pmatrix}.$$

Petre Dicu, *G.M.-B. nr. 12/2012*

Soluţie. a) Este ciudat că se cere demonstrarea relaţiei $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$, dar nu şi a relaţiei $\det(AB) = \det(BA)$, la fel de importantă pentru aflarea valorilor (x, y) de la punctul b). Ambele rezultate fac parte din bagajul de cunoştinţe predat în clasă, primul fiind însă mult mai uşor de demonstrat decât al doilea!

b) Metoda de a găsi exemple pentru matricele A şi B nu este cea de a nota $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}$ şi a impune relaţiile dorite, ceea ce duce la un sistem neliniar de opt ecuaţii cu opt necunoscute, ci de a calcula

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & 30 \\ 4 & 20 \end{pmatrix} = A(BA) = (AB)A = \begin{pmatrix} x & 60 \\ 2 & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$$

separat pentru valorile $\{x, y\} = \{10, 20\}$, ceea ce duce la un sistem liniar de patru ecuaţii cu patru necunoscute (de rang mai mic decât patru). Aceasta este expusă de exemplu la

`http://math.stackexchange.com/questions/21807/find-matrices-a-and-b-given-ab-and-ba?rq=1` $\square$

Din cele auzite de mine, nu era intenţionat să se precizeze exemplele, căci calcularea lor este doar un exerciţiu costisitor de timp şi sudoare ... Forma în care a fost enunţată problema cere însă acest lucru, şi puţini (dacă vreunul) au fost cei care au dus calculele până la capăt.

5. Clasa a XII-a

Subiectul (3)**.** *Pentru un grup* $(G, \cdot)$ *notăm (***centrul** *lui* G*)*

$$Z(G) = \{a \in G \mid ax = xa \text{ pentru orice } x \in G\}.$$

a) Să se arate că, dacă $(G, \cdot)$ *este un grup finit necomutativ, atunci*

$$|Z(G)| \leq \frac{1}{4}|G|.$$

b) Să se dea **un** *exemplu de grup finit* $(G, \cdot)$ *pentru care* $|Z(G)| = \dfrac{1}{4}|G|$.

Marian Andronache, *G.M.-B. nr. 10/2012*

Soluţie. a) Avem $Z(G) \subsetneq G$ căci G este dat necomutativ. Fie $a \in G \setminus Z(G)$, şi fie centralizatorul $C(a) = \{x \in G \mid xa = ax\}$ al lui a. Evident $Z(G)$ şi $C(a)$ sunt subgrupuri, cu $Z(G) \subsetneq C(a) \subsetneq G$ (incluziunile sunt stricte, căci altfel am avea $a \in Z(G)$, absurd). Din teorema lui Lagrange rezultă $|Z(G)| \mid |C(a)| \mid |G|$, şi cum $|Z(G)| < |C(a)| < |G|$, rezultă $|Z(G)| \leq \dfrac{1}{4}|G|$.

b) Este natural să căutăm ca exemplu un grup de ordin 8. Se face că există doar două grupuri necomutative de ordin 8, anume grupul diedral D_8 şi grupul cuaternionilor Q_8, şi ambele au proprietatea cerută. $\square$

Subiectele clasei a XII-a au fost, ca de obicei, de foarte bună calitate, dar ceva mai grele decât cele ale celorlalte clase.

6. Încheiere

Încetul cu încetul calitatea etapei locale a Municipiului Bucureşti se ameliorează. Au fost mult mai puţine scăpări şi erori (în enunţuri şi soluţii) decât în anii precedenţi, deşi multe din probleme au rămas destul de neatractive.