Problema 4. Pe o tablă sunt scrise numerele 5, 7 şi 9. La fiecare pas, alegem două numere diferite de pe tablă, a şi b, cu $a > b$ şi scriem pe tablă şi numărul $5a-4b$. Este posibil ca după mai mulţi paşi pe tablă să fie scris numărul 3333? Dar numărul 5555?

Soluţie:
Vom arăta că răspunsul la ambele întrebări este negativ.
Să observăm mai întâi că pe tablă se vor scrie numai numere impare. Într-adevăr, dacă la efectuarea unui pas, se aleg a şi b impare, numărul $5a-4b$ care va fi scris pe tablă va fi tot impar. Cum iniţial pe tablă erau numai numere impare, se vor obţine numai numere impare.
De asemenea, numerele scrise la început pe tablă dădeau resturile 0, 2 şi 4 la împărţirea cu 5. Nici ulterior nu putem obţine altfel de numere deoarece $5a-4b = 5(a-b)+b$ dă acelaşi rest la împărţirea cu 5 ca şi b. Astfel, toate numerele ce se pot scrie pe tablă vor avea ultima cifră 5, 7 sau 9, prin urmare numărul 3333 nu poate fi scris pe tablă.
În plus, $5a-4b = 4(a-b)+a$ şi, cum $a-b$ este număr par, numărul ce urmează a fi scris pe tablă la efectuarea unui pas dă acelaşi rest la împărţirea cu 8 ca şi a. Numerele scrise la început pe tablă dădeau resturile 5, 7 şi 1 la împărţirea cu 8, iar remarca precedentă arată că la efectuarea unui pas nu apar numere care să dea alte resturi la împărţirea cu 8 în afara celor deja existente, deci toate numerele care se scriu pe tablă vor da unul din resturile 1, 5 sau 7 la împărţirea cu 8. Prin urmare numărul 5555, care dă rest 3 la împărţirea cu 8 nu va putea fi scris niciodată pe tablă.