

- a) Putem colora numerele raționale pozitive cu roșu sau albastru (folosindu-le pe amândouă) astfel ca suma oricăror două numere roșii să fie roșie, iar suma oricăror două numere albastre să fie albastră?
- b) Putem colora numerele raționale pozitive cu roșu sau albastru (folosindu-le pe amândouă) astfel ca produsul oricăror două numere roșii să fie roșu, iar produsul oricăror două numere albastre să fie albastru?
- (Un număr nu poate fi colorat simultan cu două culori.)

* * *

Soluție.

a) Nu putem colora.

Să observăm mai întâi că ar trebui ca suma a oricâte numere roșii să fie roșie și, analog, că suma a oricâte numere albastre trebuie să fie albastră. Dacă presupunem că 1 este roșu și $\frac{p}{q}$ este albastru, atunci ar trebui să avem simultan că $p = \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{p \text{ termeni}}$ este roșu, dar și că $p = \underbrace{\frac{p}{q} + \frac{p}{q} + \dots + \frac{p}{q}}_{q \text{ termeni}}$ este albastru,

contradicție.

b) Da, se pot găsi astfel de colorări. Iată trei exemple simple de asemenea colorări:

- colorăm orice număr rațional pozitiv $\frac{p}{q}$ cu $p, q \in \mathbb{N}^*$, $(p, q) = 1$ cu roșu dacă p este par și cu albastru dacă p este impar.
- colorăm orice număr rațional pozitiv $\frac{p}{q}$ cu $p, q \in \mathbb{N}^*$, $(p, q) = 1$ cu roșu dacă q este par și cu albastru dacă q este impar.
- colorăm orice număr rațional din $(0, 1]$ cu roșu și celelalte cu albastru.

Se verifică imediat toate aceste colorări satisfac cerința.