Problema 3, clasa a IX-a, 2014

Ştefan Tudose

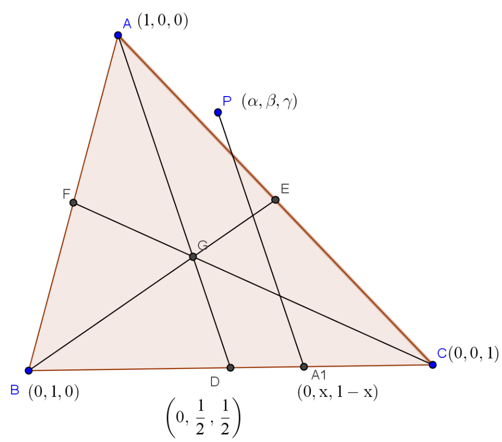
Medianele AD, BE şi CF ale triunghiului $\triangle ABC$ se intersectează în punctul G. Fie P un punct în interiorul triunghiului, nesituat pe niciuna dintre medianele acestuia. Dreapta care trece prin P şi este paralelă cu AD intersectează latura BC în punctul A_1. În mod analog se definesc punctele B_1 si C_1. Să se arate că:

$$\overrightarrow{A_1D} + \overrightarrow{B_1E} + \overrightarrow{C_1F} = \frac{3}{2}\overrightarrow{PG}$$

Fie $\triangle ABC$ triunghiul de referinţă. În continuare, notaţia $X(x_1, x_2, x_3)$ reprezintă faptul că x_1, x_2, x_3 sunt coordonatele baricentrice (normate) ale punctului X, i.e.

$$x_1 \cdot \overrightarrow{OA} + x_2 \cdot \overrightarrow{OB} + x_3 \cdot \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OX}$$

cu $x_1 + x_2 + x_3 = 1$, unde O este un punct oarecare al planului. [1]



Din argumentul ariilor, $A(1,0,0),\ B(0,1,0),\ C(0,0,1)$ şi $D\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), E\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right), F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$ (şi bineînţeles $G\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$)

[1] Se demonstrează uşor că aceste coordonate sunt $x_1 = \frac{[XBC]}{[ABC]},\ x_2 = \frac{[XCA]}{[ABC]},\ x_3 = \frac{[XAB]}{[ABC]}$, unde $\triangle ABC$ este triunghiul de referinţă şi notaţia $[XYZ]$ indică aşa zisa '*signed area*' a triughiului $\triangle XYZ$, adică aria acestuia dacă vârfurile sunt scrise în ordine trigonometrică, şi minus aria sa în caz contrar.

Fie $P(\alpha,\beta,\gamma),\ A_1(0,x,1-x)$.

Extind notaţia coordonatelor şi definesc '*displacement vector*'-ul a doua puncte $M(m_1,m_2,m_3),\ N(n_1,n_2,n_3)$ ca fiind [2]

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM}=(n_1,n_2,n_3)-(m_1,m_2,m_3)=(n_1-m_1,n_2-m_2,n_3-m_3)$$

Aşadar, $\overrightarrow{AD}=\left(-1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),\ \overrightarrow{PA_1}=(-\alpha,x-\beta,1-x-\gamma)$.

$$AD\parallel PA_1\Rightarrow\exists k\in\mathbb{R}^\star,\ \overrightarrow{PA_1}=k\cdot\overrightarrow{AD}\Leftrightarrow-\alpha=-k,\ \frac{k}{2}=x-\beta,\frac{k}{2}=1-x-\gamma$$

Se obţine $x=\frac{\alpha}{2}+\beta$ şi implicit $A_1\left(0,\beta+\frac{\alpha}{2},\gamma+\frac{\alpha}{2}\right)$

Analog se demonstrează că $B_1\left(\alpha+\frac{\beta}{2},0,\gamma+\frac{\beta}{2}\right),\ C_1\left(\alpha+\frac{\gamma}{2},\beta+\frac{\gamma}{2},0\right)$

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{A_1D}+\overrightarrow{B_1E}+\overrightarrow{C_1F}=\\
&=\left(0,\frac{1}{2}-\beta-\frac{\alpha}{2},\frac{1}{2}-\gamma-\frac{\alpha}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\alpha-\frac{\beta}{2},0,\frac{1}{2}-\gamma-\frac{\beta}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\alpha-\frac{\gamma}{2},\frac{1}{2}-\beta-\frac{\gamma}{2},0\right)\\
&=\left(1-2\alpha-\frac{\beta+\gamma}{2},1-2\beta-\frac{\gamma+\alpha}{2},1-2\gamma-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\\
&=\left(\frac{1-3\alpha}{2},\frac{1-3\beta}{2},\frac{1-3\gamma}{2}\right)\\
&=\frac{3}{2}\overrightarrow{PG}
\end{aligned}$$

Observaţie: Condiţia ca P să fie un punct interior triunghiului, nesituat pe vreuna din medianele acestuia este inutilă; concluzia rămâne adevărată pentru orice punct P din planul triunghiului.

[2] Adică $\overrightarrow{MN}=(n_1-m_1)\cdot\overrightarrow{OA}+(n_2-m_2)\cdot\overrightarrow{OB}+(n_3-m_3)\overrightarrow{OC}$. Suma coordonatelor unui vector este deci 0. Este un exerciţiu aproape trivial să demonstrăm că acestea sunt unic determinate.