Problema 1. Fie $2 < p < q$ două numere naturale prime.
Să se arate că numărul $\sqrt{\frac{(p^2-4)(q^2-4)}{pq}}$ este iraţional.

Prof. Popescu Luminiţa

Soluţie Dacă $\sqrt{\frac{(p^2-4)(q^2-4)}{pq}} \in \mathbb{Q}$ atunci $\sqrt{pq(p^2-4)(q^2-4)} \in \mathbb{Q}$, deci $pq(p^2-4)(q^2-4)$ este pătrat perfect.

Deoarece $p > 2$ este număr prim şi $(p, p^2-4) = 1$ se obţine $q^2-4 \vdots p$ şi analog $p^2-4 \vdots q$, adică $(p-2)(p+2) \vdots q$. Dar $q > p > 2$ de unde rezultă $q \geq p+2$, deci $q = p+2$. Din faptul că $pq(p^2-4)(q^2-4) = p^2(p+2)^2(p-2)(p+4)$ este pătrat perfect, obţinem că $(p-2)(p+4) = k^2$. Ultima egalitatea este echivalentă cu $(p+1)^2 - k^2 = 9$, iar acesta nu are soluţii pentru $p \neq 2$ număr prim, deci $\sqrt{\frac{(p^2-4)(q^2-4)}{pq}}$ este număr iraţional.