Clasa a VIII-a

Problema 3. Fie mulţimea de numere naturale $A = \{1, 2, 3, ..., 37\}$ şi S o submulţime a sa, astfel încât oricare două elemente ale lui S au diferenţa diferită de 3 sau 4. Aflaţi cardinalul maxim al submulţimii S.

Felician Preda

Soluţie.

$S = \{1, 2, 3, 8, 9, 10, 15, 16, 17, 22, 23, 24, 29, 30, 31, 36, 37\}$ este o submulţime de cardinal 17. .... **1p**

Arătăm că 17 este este maximul căutat. **1p**

Oricare ar fi 7 numere naturale consecutive putem alege maxim 3 numere cu proprietatea din enunţ........ **1p**

Fie $X = \{a, a+1, a+2, a+3, a+4, a+5, a+6\}$. Elementele lui X le distribuim în $X_1 = \{a, a+3\}$, $X_2 = \{a+1, a+4\}$, $X_3 = \{a+2, a+5\}$, $X_4 = \{a+6\}$. Din fiecare mulţime alegem maxim un număr. **2p**

Pentru a putea alege, prin absurd, 4 numere respectând cerinţa, trebuie să alegem numărul $a + 6$. Acesta exclude prezenţa în submulţimea căutată a numerelor $a + 2$ şi $a + 3$. În submulţimea căutată vor fi numerele a şi $a + 5$, aşadar din mulţimea X_2 nu am avea niciun număr. **1p**

Împărţim mulţimea A în cinci mulţimi de câte 7 numere consecutive, plus numerele 36 şi 37. În total vom avea cardinalul maxim al submulţimii S numărul $3 \times 5 + 2 = 17$. **1p**