Problema 1. Spunem despre un număr natural nenul n că este *bun* dacă printre divizorii săi există trei numere naturale, distincte două câte două, astfel încât suma pătratelor acestora este egală cu n.
a) Demonstraţi că orice număr bun este divizibil cu 3.
b) Arătaţi că există o infinitate de numere naturale bune.

test de selecţie pentru EGMO, Peru, 2018

a) Presupunem că ar exista un număr bun n care să nu fie divizibil cu 3. Atunci niciunul din divizorii săi nu este divizibil cu 3, deci toţi divizorii sunt de forma $3k+1$ sau $3k-1$. Atunci pătratele tuturor divizorilor lui n dau restul 1 la împărţirea cu 3, iar dacă n este suma a trei asemenea pătrate, atunci n este divizibil cu 3, contradicţie.

b) Să observăm că 30 este bun: $30 = 1^2 + 2^2 + 5^2$, iar $1, 2, 5$ sunt divizori ai lui 30. De aici rezultă uşor că orice număr de forma $30k^2$ este bun deoarece el se scrie $k^2 + (2k)^2 + (5k)^2$, unde k, $2k$, $5k$ sunt, în mod evident, divizori ai lui $30k^2$. Cum $k \in \mathbb{N}^*$ poate lua o infinitate de valori, deducem că există o infinitate de numere bune.