Polinomul caracteristic al unei matrice. Teorema Cayley-Hamilton

Vasile Pop

Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ o matrice pătratică.

Definiţie. Polinomul $f_A \in \mathbb{C}[X]$, $f_A(x) = (-1)^n \det(A - xI_n)$ se numeşte **polinomul caracteristic al matricei** A.

Teoremă. *Forma canonică a polinomului caracteristic este*

$$f_A(x) = x^n - \sigma_1(A)x^{n-1} + \sigma_2(A)x^{n-2} - \ldots + (-1)^{n-1}\sigma_{n-1}(A)x + (-1)^n\sigma_n(A)$$

unde $\sigma_k(A)$ este suma tuturor minorilor diagonali de ordin k.

Demonstraţie. Notăm cu $A_1, A_2, \ldots, A_n$ coloanele matricei A şi cu $E_1, E_2, \ldots, E_n$ coloanele matricei I_n. Descompunem determinantul în sumă de determinanţi:

$$\det(A - xI_n) = \det\left(\begin{array}{c|c|c|c} A_1 - xE_1 & A_2 - xE_2 & \ldots & A_n - xE_n \end{array}\right)$$

$$= \det\left(\begin{array}{c|c|c|c} A_1 & A_2 & \ldots & A_n \end{array}\right) - x\sum_{i=1}^{n} \det\left(\begin{array}{c|c|c|c|c} A_1 & \ldots & E_k & \ldots & A_n \end{array}\right)$$

$$+x^2 \sum_{i<j} \det\left(\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} A_1 & \ldots & E_i & \ldots & E_j & \ldots & A_n \end{array}\right) - \ldots +$$

$$+(-x)^n \det\left(\begin{array}{c|c|c|c} E_1 & E_2 & \ldots & E_n \end{array}\right).$$

Dezvoltând determinanţii după coloana E_i, după coloanele E_i şi $E_j, \ldots$, obţinem

$$\det(A - xI_n) = \det A - x\sigma_{n-1}(A) + x^2\sigma_{n-2}(A) - \ldots + (-1)^n \det I_n,$$

unde

$$\sigma_1(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}, \quad \sigma_2(A) = \sum_{i<j} \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ji} & a_{jj} \end{vmatrix}, \ldots,$$

$$\sigma_{n-1}(A) = \sum_{i=1}^{n} \Delta_{ii}, \quad \sigma_n(A) = \det A.$$

Observaţii. • $\sigma_1(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ se numeşte urma matricei A şi se notează cu $Tr(A)$.

• Urma unei matrice este o funcţie $Tr : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ şi are proprietatea

$$Tr(aA + bB) = aTr(A) + bTr(B),$$

pentru orice $a, b \in \mathbb{C}$ şi orice $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

• $\sigma_2(A) = \sum_{i<j} \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ji} & a_{jj} \end{vmatrix}$ este o funcţie care verifică relaţia

$$\sigma_2(A + B) + \sigma_2(A - B) = 2(\sigma_2(A) + \sigma_2(B)),$$

pentru orice $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

• $\sigma_n(A)$ este determinantul matricei A.

Definiţie. Rădăcinile polinomului caracteristic $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ se numesc valori proprii ale matricei A, iar mulţimea $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$ se numeşte spectrul matricei A (se notează $Spec(A)$).

Observaţie. Un număr complex $\lambda \in \mathbb{C}$ este valoare proprie pentru matricea A dacă şi numai dacă $f_A(\lambda) = 0$.

Legătura între valorile proprii şi coeficienţii polinomului caracteristic

Fie $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ cele n rădăcini (nu neapărat distincte) ale ecuaţiei $f_A(\lambda) = 0$, deci valorile proprii ale matricei A.

Notând cu $S_1(A), S_2(A), \ldots, S_n(A)$ sumele simetrice ale numerelor $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$:

$$S_1(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i, \quad S_2(A) = \sum_{i<j} \lambda_i \lambda_j,$$

$$S_3(A) = \sum_{i<j<k} \lambda_i \lambda_j \lambda_k, \ldots, S_n(A) = \lambda_i \lambda_j \ldots \lambda_n$$

din relaţiile lui Viète avem:

$$f_A(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \ldots (x - \lambda_n)$$

$$= x^n - S_1(A)x^{n-1} + S_2(A)x^{n-2} - \ldots + (-1)^{n-1} S_{n-1}(A)x + (-1)^n S_n(A).$$

Identificând coeficienţii polinomului f_A scris în cele două forme obţinem:

$$\sigma_k(A) = S_k(A), \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

În particular, avem:

$$\sigma_1(A) = Tr(A) = S_1(A) \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$$

(urma unei matrice este egală cu suma valorilor proprii ale matricei).

$$\sigma_n(A) = S_n(A) \Leftrightarrow \det A = \prod_{k=1}^{n} \lambda_k$$

(determinantul unei matrice este produsul valorilor proprii).

Matricea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ este inversabilă dacă şi numai dacă ea nu are valoare proprie pe 0 ($0 \notin Spec(A)$).

Observaţie. Dacă $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ şi $\lambda \in \mathbb{C}$ este o valoare proprie a matricei A, atunci:

a) λ^k este valoare proprie pentru matricea A^k.

b) $P(\lambda)$ este valoare proprie pentru matricea $P(A)$, pentru orice polinom $P \in \mathbb{C}[X]$.

c) Dacă A este inversabilă, atunci $\lambda \neq 0$ şi $\dfrac{1}{\lambda}$ este valoare proprie pentru matricea A^{-1}.

Teorema Cayley-Hamilton

Orice matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *își anulează propriul polinom caracteristic, adică* $f_A(A) = 0$ *sau*

$$A^n - \sigma_1(A)A^{n-1} + \sigma_2(A)A^{n-2} - \ldots + (-1)^{n-1}\sigma_{n-1}(A)A + (-1)^n\sigma_n(A)I_n = 0.$$

Demonstraţie. Dacă $B_* = [B_{ij}]^t_{i,j=\overline{1,n}}$ este reciproca matricei B, atunci

$$B \cdot B_* = \det B \cdot I_n$$

(am notat $B_{ij} = (-1)^{i+j}\Delta_{ij}$, complementul algebric al elementului b_{ij}).

Luăm $B = A - xI_n$ şi atunci elementele matricei B_* fiind minori de ordin $n-1$ din matricea B, sunt polinoame de grad $\leq n-1$ în x. Astfel

$$(A - xI_n)_* = A_1 + A_2x + \ldots + A_nx^{n-1}$$

unde $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Din relaţia

$$(A - xI_n)(A - xI_n)_* = \det(A - xI_n)I_n = (-1)^n f_A(x)I_n$$

$$= (a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n)I_n,$$

identificând coeficienţii puterilor lui x obţinem egalităţile matriciale:

$$A \cdot A_1 = a_0I_n, \quad A \cdot A_2 - A_1 = a_1I_n, \quad A \cdot A_3 - A_2 = a_2I_n, \ldots,$$

$$A \cdot A_n - A_{n-1} = a_{n-1}I_n, \quad -A_n = a_nI_n.$$

Înmulţind relaţiile în dreapta respectiv cu $I_n, A, A^2, \ldots, A^n$ obţinem:

$$0 = a_0I_n + a_1A + a_2A^2 + \ldots + a_nA^n = (-1)^n f_A(A),$$

deci

$$f_A(A) = 0.$$

Consecinţe. 1) Şirul puterilor naturale ale unei matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ se poate determina prin relaţia de recurenţă:

$$A^{n+k} - \sigma_1(A)A^{n+k-1} + \sigma_2(A)A^{n+k-2} - \ldots + (-1)^{n-1}\sigma_{n-1}(A)A^{k+1}$$

$$+(-1)^n\sigma_n(A)A^k = 0, \quad k \in \mathbb{N},$$

pornind de la matricele $I_n, A, A^2, \ldots, A^{n-1}$.

2) Pentru orice polinom $P \in \mathbb{C}[X]$ de grad oricât de mare, există un polinom $P_1 \in \mathbb{C}[X]$ de grad $\leq n-1$ astfel ca $P(A) = P_1(A)$.

3) Dacă $\det A \neq 0$ (A este inversabilă), atunci din Teorema Cayley-Hamilton rezultă:

$$A^{-1} = \frac{(-1)^{n-1}}{\det A}(A^{n-1} - \sigma_1(A)A^{n-2} + \sigma_2(A)A^{n-3} - \ldots + (-1)^{n-1}\sigma_{n-1}(A)I_n)$$

(inversa unei matrice este polinom de acea matrice).

Exerciţii

1. Fie $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Să se arate că:

a) Dacă $ad - bc = 0$ atunci $A^n = (a+d)^{n-1}A$, pentru orice $n \geq 2$.

b) Dacă $a + d = 0$ atunci

$$A^n = \begin{cases} (a^2+bc)^k I_2, & \text{dacă} \quad n = 2k \\ (a^2+bc)^k A, & \text{dacă} \quad n = 2k+1 \end{cases}$$

c) Dacă $A^2 \neq 0$ atunci $A^n \neq 0$ pentru orice $n \geq 1$.

2. Fie $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Să se arate că există şirurile $(x_n)_{n\geq 1}$, $(y_n)_{n\geq 1}$ astfel ca

$$A^n = x_n A + y_n I_2, \text{ pentru orice } n \geq 1,$$

iar şirurile verifică relaţiile de recurenţă:

$$x_{n+1} = \alpha x_n + \beta x_{n-1}, \quad y_{n+1} = \alpha y_n + \beta y_{n-1}, \quad n \geq 2,$$

unde $\alpha = TrA$, $\beta = -\det A$.

3. Fie $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ cu valorile proprii $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$.

Să se arate că există matricele $B, C \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ astfel ca

$$A^n = \begin{cases} \lambda_1^n B + \lambda_2^n C, & \text{dacă} \quad \lambda_1 \neq \lambda_2 \\ \lambda_1^n B + n\lambda_1^{n-1} C, & \text{dacă} \quad \lambda_1 = \lambda_2, \text{ pentru orice } n \geq 1. \end{cases}$$

4. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \to \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $f(x) = \dfrac{4x+1}{2x+3}$.

Să se determine funcţia $f^n = f \circ f \circ \ldots \circ f$.

5. Se consideră şirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definit prin relaţia de recurenţă

$$x_{n+1} = \frac{2x_n + 1}{2x_n + 3}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Să se determine x_n, $n \in \mathbb{N}$ şi să se calculeze limita şirului.

6. Fie $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ cu $\det A = TrA = 1$. Să se determine numărul elementelor mulţimii $\{A^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

7. Fie $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ astfel ca $|TrA| > 2$. Să se arate că pentru orice $m, n \in \mathbb{N}$, $m \neq n$, rezultă $A^m \neq A^n$.

8. Fie $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ astfel ca $Tr(A \cdot B) = 0$. Să se arate că

$$(A \cdot B)^2 = (B \cdot A)^2.$$

Probleme

1. Fie $A \in \mathcal{M}^n(\mathbb{C})$ astfel ca $A^n \neq 0$. Să se arate că $A^k \neq 0$, pentru orice $k \in \mathbb{N}$.

2. Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Să se arate că polinoamele caracteristice ale matricelor $A \cdot B$ şi $B \cdot A$ coincid.

Indicaţie. Dacă B este inversabilă, atunci $B \cdot A = B(A \cdot B)B^{-1}$. Dacă B este neinversabilă luăm $B_\alpha = B - \alpha I_n$.

3. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ astfel ca $Tr(A) = Tr(A^2) = \ldots = Tr(A^n) = 0$. Să se arate că $A^n = 0$.

Indicaţie. Toate valorile proprii ale matricei A sunt zero.

4. Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ astfel ca $A \cdot B - B \cdot A = A$. Să se arate că $A^n = 0$.

Indicaţie. $A^k B - BA^k = kA^k$ şi $Tr(A^k B - BA^k) = 0$, $k \in \mathbb{N}^*$.

5. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ şi notăm $A^k = [a_{ij}^{(k)}]_{i,j=\overline{1,n}}$.

Să se arate că:

a) Dacă $a_{11}^{(k)} = 0$ pentru $k = \overline{1,n}$, atunci $\det A = 0$.

b) Dacă $a_{12}^{(k)} = 0$, pentru $k = \overline{1, n-1}$, atunci $a_{12}^{(k)} = 0$, pentru orice $k \geq 1$.

6. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$ astfel ca $\det(A - \sqrt[n]{3} \cdot I_n) = 0$. Să se arate că

$$TrA = 0 \quad \text{şi} \quad \det A = (-1)^n \cdot 3.$$

Indicaţie. $\lambda = \sqrt[n]{3}$ este valoare proprie pentru A, deci $f_A(x) = x^n - 3$.

7. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ cu $|TrA| > n$. Să se arate că funcţia $f : \mathbb{N} \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $f(k) = A^k$ este injectivă.

8. Să se arate că inversa unei matrice circulare este o matrice circulară.

Indicaţie. $C[a_1, a_2, \ldots, a_n] = f(C)$, unde

$$f(x) = a_1 + a_2 x + \ldots + a_n x^{n-1}$$

şi $C = C[0, 1, 0, \ldots, 0]$.

9. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ şi $P \in \mathbb{C}[X]$ astfel ca $P(A) = 0$. Să se arate că pentru orice valoare proprie $\lambda \in Spec(A)$ avem $P(\lambda) = 0$.

10. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ astfel ca $A^2 + 2A + 5I_n = 0$. Să se arate că n este număr par.

Vasile Pop, Conf. dr. Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca