

Etapa 5, Problema 1

Un joc matematic generează perechi de numere întregi pornind de la o pereche introdusă inițial. Jocul are trei opțiuni, după cum urmează:

- opțiunea A transformă perechea (a,b) în perechea (b,a) ;
- opțiunea B transformă perechea (a,b) în perechea $(a+3b,b)$;
- opțiunea C transformă perechea (a,b) în perechea $(a-2b,b)$.

Fiecare opțiune poate fi utilizată de oricâte ori. De exemplu, pornind de la perechea $(1,2)$ și aplicând succesiv șirul de opțiuni A, B, B, C, obținem perechea $(6,1)$.

a) Construiți un șir de aplicări ale celor trei opțiuni care să conducă de la perechea $(4,6)$ la perechea $(-2,-8)$.

b) Demonstrați că, dacă plecăm de la perechea $(2014,2015)$, nu putem ajunge la perechea $(20142014,20152015)$.
