Proiect de lecție: SUMA LUI GAUSS

Autor: Andrei-Sebastian Drăgulescu,

clasa a IV-a,Constanța

Poate că vă întrebați cine a fost acest Gauss și dacă nu a avut altceva de făcut decât să stea să calculeze niște sume.

Carl Friedrich Gauss (1777-1855) este considerat al treilea geniu matematic al omenirii, după Arhimede și Newton. A fost un copil precoce care se gândea mereu la cifre, uimindu-și profesorii și apropiații. O povestioară din copilăria lui este redată în romanul ”Măsurarea lumii” al scriitorului german Daniel Kehlmann care a fost tradus și în limba română. Învățătorul său, J. G. Büttner, cunoscut pentru severitatea sa, a cerut elevilor să calculeze suma numerelor naturale de la 1 la 100. Micul Carl, la numai 9 ani și-a uimit învățătorul reușind să facă rapid acest calcul în minte și să dea răspunsul corect: 5050.

Cum a făcut acest lucru?

A grupat cele 100 de numere două câte două astfel încât suma fiecărei grupe să fie aceeași: 1+100=2+99=3+98=…=50+51=101.

Avem 50 de grupe, deci **suma este egală cu 101x50=5050.**

Acest mod ingenious de a aplica proprietățile adunării (asociativitatea și comutativitatea) a fost descoperit de un copil.Vă întrebați probabil la ce ne-ar folosi descoperirea lui Gauss? Ne ajută să calculăm mai repede niște sume cu foarte mulți termeni.

Folosind aceeași idee putem calcula suma primelor numere natural nenule, oricare ar fi n număr natural, dacă suma are un număr par de termeni.

Pentru a calcula **S=1+2+3+…+(n-2)+(n-1)+n**, unde **n este număr par nenul**, grupăm convenabil termenii astfel încât suma fiecărei perechi să fie aceeași:1+n=2+(n-1)=3+(n-2)=….=(n:2) + [(n:2)+1]. Sunt (n:2) perechi, deci **suma este egală cu [n (n+1)]:2.**

Această formulă o putem însă utiliza și dacă suma are un număr impar de termeni.

De exemplu, vrem să calculăm **S=1+2+3+4+5+…+147+148+149+150+151**

Suma are 151 de termeni (număr impar). Dacă folosim metoda de mai sus și grupăm termenii câte doi, unul va rămâne singur, pentru că 151 nu se împarte exact la 2 (obținem restul 1).

Trebuie să aflăm acest termen. Grupăm termenii câte doi astfel: 1 cu 151, 2 cu 150, 3 cu 149 etc. (termenii egal depărtați). Fiind număr impar de termeni, unul va rămâne fără pereche: este vorba de termenul din mijloc; numărul termenilor aflați în fața lui este egal cu numărul termenilor de după el. Știm câți termeni sunt în total (151). Fără cel din mijloc rămân 150 de termeni care pot fi grupați câte doi. Deci se formează 75 de perechi (150 împărțit la 2).Înseamnă că înaintea termenului din mijloc sunt 75 de termeni, la fel și după el. Suma are termenii consecutivi, deci termenul din mijloc, care rămâne fără pereche, este 76.

Putem forma 75 de perechi de numere cu suma 152; numărul 76 rămâne singur. Deci suma numerelor de la 1 la 151 este egală cu 152 adunat cu el însuși de 75 de ori (152x75), la care adăugăm numărul 76. Obținem 11 476 sau [**n (n+1)**]**:2=(151x152):2=11 476.**

Pe lângă această metodă (formarea deperechi) mai putem utiliza și o altă metodă pentru a calcula suma primelor n numere natural, și anume prin dublarea sumei.

Scrie m suma S în două moduri, o dată cu termenii în ordine crescătoare și o dată cu termenii în ordine descrescătoare:

S=1+2+3+…+(n-2)+(n-1)+n

S=n+(n-1)+(n-2)+….+3+2+1

Adunând cele două egalități obținem:

S+S=2S=(1+n)+[2+(n-1)]+[3+ (n-2)]+….+[(n-2)+3]+[(n-1)+2]+(n+1)

$= \underbrace{(n+1)+(n+1)+\ldots+(n+1)}_{\text{de } n \text{ ori}}=n(n+1)$ rezultă că **S=[n(n+1)]:2**

Avantajul acestei variante este că se poate aplica și atunci când numărul termenilor este impar, fără să fie nevoie să aflăm care este termenul din mijloc.

Vom încerca să calculăm urmatoarele sume:

1) S1=2+4+6+……..+58+60

Această sumă nu este una Gauss, pentru că numerele nu sunt consecutive și nici nu pleacă de la 1. Observăm însă că îl putem da factor comun pe 2 și rezultă că suma va fi S1 = 2x(1+2+3+ ... +29+30).

În paranteză avem o sumă Gauss, deci: S1= 2 x [(30 x 31):2] = 30 x 31 = 930

2) S2=1+3+5+……..+97+99

Nici această sumă nu este una Gauss, dar observăm că toți termenii sunt numere naturale impare consecutive, deci putem scrie: S2= (2x0+1)+(2x1+1)+(2x2+1)+...+(2x49+1)

$S2=\underbrace{1+1+...+1}_{\text{50 termeni}}+2x1+2x2+2x3+...+2x49$

S2= 50+2x(1+2+3+…+49)= 50+2x(49x50):2= 50+49x50

S2=50x(1+49)=50x50=2500

3) S3=1+6+11+……..+51

Din nou, această sumă nu este una Gauss, dar observăm ca avem un șir de numere în care termenii cresc din 5 în 5 și putem scrie: S3=(5x0+1)+(5x1+1)+(5x2+1)+....+(5x10+1)

$S2= 1+1+...+1+5x1+5x2+5x3+...+\underbrace{5x10}_{\text{de 11 ori}}$

S2= 11+5x(1+2+3+…+10)= 11+5x(10x11):2= 286

4) S4=1111+2222+3333+4444+5555+6666+7777+8888+9999

Observăm că putem da factor comun pe 1111: S4=1111x(1+2+3+4+5+6+7+8+9)

S4=1111 x (9x10):2=49 995

Vom rezolva și câteva probleme cu ajutorul sumei lui Gauss:

Problema 1: La un turneu de șah concurenții joacă fiecare cu fiecare câte o singură partidă. În total s-au jucat 36 de partide. Câți concurenți au fost?

Rezolvare: Partidele jucate sunt de forma: 1+2+3+4+...+n=36, unde n reprezintă cel mai mare număr de partide jucate de un copil.

Avem de rezolvat o sumă Gauss: nx(n+1):2=36. Rezultă că n x (n+1)=72

8 și 9 sunt numerele consecutive care înmulțite dau 72, deci n=8

Deci fiecare copil a jucat 8 partide și rezultă că au fost 9 concurenți.

Problema 2: Andrei calculează suma numerelor până la 18. Din greșeală adună un număr de două ori și obține rezultatul 180. Aflați numărul care a fost adunat de 2 ori.

Rezolvare: Suma primelor 18 numere naturale este: 1+2+3+...+18=(18x19):2=171.

Numărul adunat de două ori este 180-171=9

Problema 3: Avem 30 de cutii cu câte 40 de bomboane. Fiecare bomboană cântărește 15 grame. Dintr-o greșeală de fabricație, bomboanele dintr-o cutie au cu câte un gram mai puțin. Cum descoperim cutia respectivă făcând o singură cântărire?

Rezolvare: Numerotăm cutiile cu numere de la 1 la 30. Scoatem din cutia 1 o bomboană, din cutia 2 două bomboane, din cutia 3 trei bomboane... din cutia 30 scoatem treizeci de bomboane.

Deci scoatem în total: 1+2+3+...+30=(30x31):2=465 bomboane

Cântărim aceste bomboane. Dacă toate ar avea câte 15 grame, atunci bomboanele scoase din cutii ar cântări în total 465x15=6975 grame. Dar bomboanele dintr-o cutie cântăresc cu un gram mai puțin. Cântarul ne va arăta deci mai puțin de 6975grame. Diferența va arăta exact cutia din care au fost scoase bomboanele cu gramaj mai mic. De exemplu, dacă cântarul va arăta 6974 grame(6 975-1), rezultă că în cutia 1 sunt bomboanele cu gramaj mai mic; dacă cântarul va arăta 6 970 grame (6 975-5), cutia căutată este cea cu numărul 5, și tot așa.

Probleme propuse:

1. Fiecare sat din cele 12 ale unei comune este legat cu celelalte sate prin câte un pod. Câte drumuri ce leagă podurile sunt în comună?
2. Într-o încăpere sunt 8 persoane. Fiecare dă mâna cu toți ceilalți o singură dată. Câte strângeri de mână au loc?
3. Citesc un roman în mai multe zile astfel: în prima zi citesc o pagină și apoi, în fiecare zi citesc cu câte o pagină mai mult decât în ziua precedentă. În câte zile voi termina de citit romanul care are 820 de pagini?
4. Un pendul bate o dată la fiecare jumătate de oră și la începutul fiecărei ore bate o dată, sau de două ori...sau de 12 ori. Câte bătăi execută pendulul în 24 de ore?

Bibliografie:

1. Baciu Florina, MateescuDoina, Matematicăclasa a IV-a partea 1,Editura CARTEX, 2008
2. BălăucăArtur, BudeanuCătălin, Matematică 1001 de problem pentrumiciimatematicieni, olimpiade, concursurijudețene, interjudețene, centre de excelențășipregatireaadmiteriiînclasa a V-a, EdituraTaida, Iași, 2016;
3. Călugăriță Angelica, Exercițiișiprobleme de matematicăpentrueleviiclaselor I-IV, Editura Universal Pan, București, 1998;
4. LuminaMath, Culegere de problemepentruclasele II-IV, Editura Art, București, 2016;
5. PârâialăViorica, PârâialăDumitru, Teste de matematică- Concursurișcolareînclasele a III-a și a IV, EdituraEuristica, Iași 2012.
6. http://forum.7p.ro/Exercitii-care-se-rezolva-cu-sume-tip Gauss.aspx?g=posts&t=15942#ixzz5CQxiIdGC
7. http://www.mathema.ro/algebra/adunarea-numerelor-naturale-varianta-2