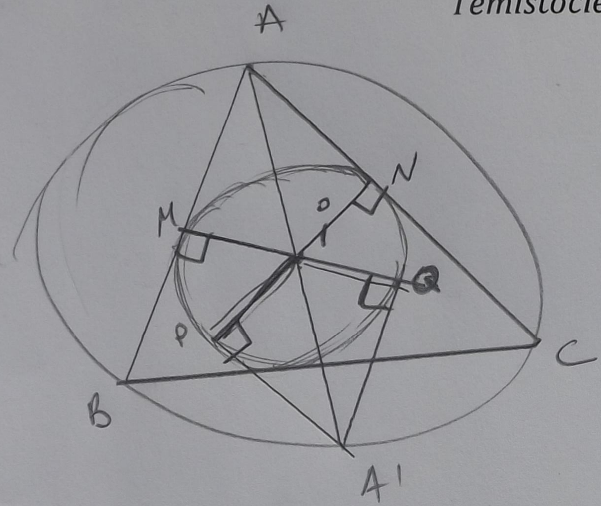
Etapa 6, Problema 4

Fie ABC un triunghi cu $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$, I centrul cercului înscris și A' punctul în care dreapta AI retaie cercul circumscris triunghiului. Demonstrați că punctele de contact cu cercul înscris ale tangentelor duse din A și din A' sunt vârfurile unui dreptunghi dacă și numai dacă $2a = b + c$.

Temistocle Bîrsan, Recreații Matematice 1/2015



OBS A, i, A' coliniare

$Ai \perp MN$, $A'i \perp PQ$ $\Rightarrow MN \parallel PQ$

$\widehat{iA'B} = \widehat{ACB}$

$\widehat{iBA'} = \widehat{iBC} + \widehat{CBA'} = \frac{\hat{A}}{2} + \frac{\hat{B}}{2}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \widehat{BiA'} = \widehat{iBA'} = \frac{\hat{A}}{2} + \frac{\hat{B}}{2}$

$\Rightarrow \Delta iBA'$ isoscel cu $iB = iA'$

analog $\Delta iA'C$ isoscel $iA' = iC$

I) dacă M, N, P, Q vf. unui dreptunghi $\Rightarrow MN = PQ \Rightarrow \Delta MiN \equiv \Delta PiQ$

$\Rightarrow \widehat{MiN} = \widehat{PiQ}$ dar $AMiN$, $A'PiQ$ inscriptibile

$\Rightarrow \widehat{MAN} = \widehat{PA'Q}$

cum $PA' = A'Q$; $AM = AN$; $MN = PQ$ $\Rightarrow \Delta PQA' \equiv \Delta MNA$

$\Rightarrow PA' = AM \Rightarrow \Delta AMi \overset{LUL}{\equiv} \Delta iPA' \Rightarrow \underline{Ai = iA'}$

$\Rightarrow$ cf T. Ptolemeu $ABA'C$:

$AA' \cdot BC = AB \cdot A'C + BA' \cdot AC$

$2 \cdot Ai \cdot a = c \cdot Ai + b \cdot Ai$

$\Rightarrow \underline{2a = b + c}$

II) dacă $2a = b + c \xRightarrow{\text{Ptolemeu}} Ai = iA' \overset{C.I.}{\Rightarrow} \Delta PiA' \equiv \Delta MAi \Rightarrow PA' = A'Q = MA =$
$= AN$ analog $\Delta ANi \equiv \Delta A'Qi \Rightarrow \widehat{MAi} + \widehat{NAi} = \widehat{PA'i} + \widehat{QA'i}$

$\Rightarrow \widehat{MAN} = \widehat{PA'Q}$ $\Rightarrow \Delta AMN \overset{LUL}{\equiv} \Delta A'PQ$

$\Rightarrow MN = PQ \Rightarrow M, N, P, Q$ formează un dreptunghi