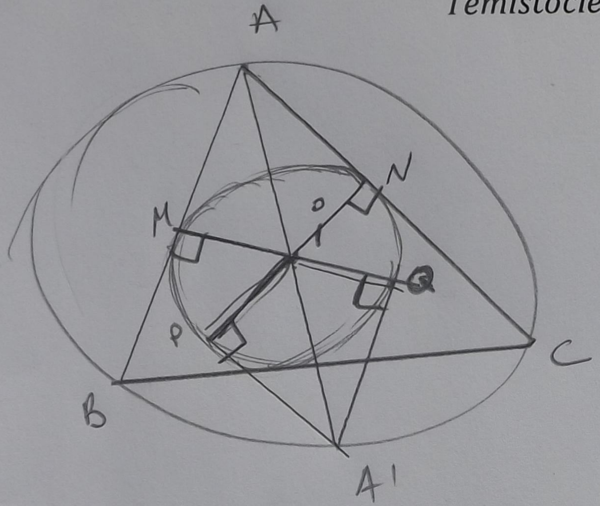
Etapa 6, Problema 4

Fie ABC un triunghi cu $a = BC, b = AC, c = AB$, I centrul cercului înscris și A' punctul în care dreapta AI retaie cercul circumscris triunghiului. Demonstrați că punctele de contact cu cercul înscris ale tangentelor duse din A și din A' sunt vârfurile unui dreptunghi dacă și numai dacă $2a = b + c$.

Temistocle Bîrsan, Recreații Matematice 1/2015



OBS A, I, A' coliniare

$\left.\begin{array}{l} AI \perp MN \\ A'I \perp PQ \end{array}\right\} \Rightarrow MN \parallel PQ$

$\left.\begin{array}{l} \widehat{IA'B} = \widehat{ACB} \\ \widehat{IBA'} = \widehat{IBC} + \widehat{CBA'} = \frac{\hat{A}}{2} + \frac{\hat{B}}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \widehat{BIA'} = \widehat{IBA'} = \frac{\hat{A}}{2} + \frac{\hat{B}}{2}$

$\Rightarrow \Delta IBA'$ isoscel cu $IB = IA'$

analog $\Delta IA'C$ isoscel $IA' = IC$

I) dacă M, N, P, Q vf. unui dreptunghi $\Rightarrow MN = PQ \Rightarrow \Delta MIN \equiv \Delta PIQ$

$\Rightarrow \widehat{MIN} = \widehat{PIQ}$ dar $AMIN$, $A'PIQ$ inscriptibile

$\Rightarrow \widehat{MAN} = \widehat{PA'Q}$

cum $\left.PA' = A'Q;\ AM = AN;\ MN = PQ\right\} \Rightarrow \Delta PQA' \equiv \Delta MNA$

$\Rightarrow PA' = AM \Rightarrow \Delta AMI \overset{LUL}{\equiv} \Delta IPA' \Rightarrow \underline{AI = IA'}$

$\Rightarrow$ cf T. Ptolemeu $ABA'C$:

$$AA' \cdot BC = AB \cdot A'C + BA' \cdot AC$$

$$2 \cdot AI \cdot a = c \cdot AI + b \cdot AI$$

$$\Rightarrow \underline{2a = b + c}$$

II dacă $2a = b + c \overset{\text{Ptolomeu}}{\Rightarrow} AI = IA' \overset{C.I.}{\Rightarrow} \Delta PIA' \equiv \Delta MAI \Rightarrow PA' = A'Q = MA =$
$= AN$ analog $\Delta ANI \equiv \Delta A'QI \Rightarrow \widehat{MAI} + \widehat{NAI} = \widehat{PA'I} + \widehat{QA'I}$

$\Rightarrow \widehat{MAN} = \widehat{PA'Q} \Rightarrow \Delta AMN \overset{LUL}{\equiv} \Delta A'PQ$

$\Rightarrow MN = PQ \Rightarrow M, N, P, Q$ formează un dreptunghi