

## CONCURSUL VIITORI OLIMPICI

MIHAI BĂLUNĂ, MIHAI MONEA, MARIUS PERIANU, GABRIEL POPA

REZUMAT. Acest material are scop prezentarea subiectelor propuse la etapa finala a Concursului Viitori Olimpici, în edițiile 2010 - 2013

## 1. INTRODUCERE

Concursul *Gazeta Matematică Viitori Olimpici*, găzduit în ultimii patru ani de frumosul oraș Câmpulung Muscel, adună în a doua jumătate a lunii august pe cei care, de-a lungul unui an școlar, se dovedesc a fi buni rezolvitori ai problemelor publicate pe site-ul *viitoriolimpici.ro*, precum și în *Gazeta Matematică*. Acești elevi au de rezolvat trei probleme, una dintre acestea fiind selectată dintre cele publicate pe site. În plus, concurenții susțin și o probă orală. Prezentăm în continuare subiectele propuse participanților la cele patru ediții precedente ale concursului și le urăm succes în confruntarea cu problemele ediției a cincea.

## 2. EDIȚIA I – 17 AUGUST 2010

**Problema 1.** *Arătați că orice submulțime cu  $7n+1$  elemente a mulțimii  $\{1, 2, \dots, 8n\}$  conține patru numere  $a, b, c$  și  $d$  astfel încât  $a|b, b|c$  și  $c|d$ .*

*Soluție.* Considerăm submulțimile mulțimii  $\{1, 2, \dots, 8n\}$  de forma

$$C_k = \{2k - 1, 2(2k - 1), 2^2(2k - 1), \dots\}, k = \overline{1, 4n}.$$

Submulțimile  $C_{2n+1}, C_{2n+3}, \dots, C_{4n}$  conțin câte un singur element. În total, aceste  $2n$  submulțimi au  $2n$  elemente. Submulțimile  $C_{n+1}, C_{n+2}, \dots, C_{2n}$  conțin câte două elemente, deci în total, aceste  $n$  submulțimi au  $2n$  elemente.

Rămân  $3n + 1$  elemente în submulțimile  $C_1, C_2, \dots, C_n$ , ceea ce înseamnă, conform principiului cutiei, că măcar una dintre aceste mulțimi conține patru elemente. În acest moment, concluzia se impune.  $\square$

**Problema 2.** *Pe o tablă  $2n \times 2n$  se află pietre albe și pietre roșii, cel mult o piatră în fiecare pătrat  $1 \times 1$ . Se execută următoarele operații:*

(i) *de pe fiecare coloană pe care se află o piatră albă se elimină toate pietrele roșii;*

(ii) *de pe fiecare linie pe care a rămas o piatră roșie se elimină toate pietrele albe.*

*Arătați că dintr-una dintre culori au rămas cel mult  $n^2$  pietre.*

Olimpiadă Rusia

*Soluție.* După executarea celor două operații, rămân doar linii și coloane monoculore. Fie  $l_a$  numărul de linii albe (adică cele care conțin doar pietre albe),  $l_r$  numărul de linii roșii,  $c_a$  numărul de coloane albe și  $c_r$  numărul de coloane roșii. Numărul de pietre albe poate fi, în final, cel mult  $l_a \cdot c_a$ , iar cel de pietre roșii cel mult  $l_r \cdot c_r$ . Este suficient să arătăm că  $l_a \cdot c_a \leq n^2$  sau  $l_r \cdot c_r \leq n^2$ .

Dacă  $l_a + c_a \leq 2n$ , atunci

$$l_a \cdot c_a \leq l_a(2n - l_a) = n^2 - (n - l_a)^2 \leq n^2.$$

Dacă  $l_a + c_a > 2n$ , rezultă că

$$l_r + c_r = 4n - (l_a + c_a) \leq 2n$$

și, ca mai sus,  $l_r \cdot c_r \leq n^2$ . □

**Problema 3.** Șirul de numere naturale  $(x_n)_{n \geq 0}$  este definit prin  $x_0 = x_1 = 1$  și

$$x_{n+1} = 14x_n - x_{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Demonstrați că, pentru fiecare număr natural  $n$ , numărul  $2x_n - 1$  este pătrat perfect.

ViitoriOlimpici.ro

*Soluție.* Soluțiile ecuației caracteristice sunt

$$t_{1,2} = \left(2 \pm \sqrt{3}\right)^2.$$

Termenul general al șirului are forma

$$x_n = c_1 t_1^n + c_2 t_2^n$$

și, ținând seama de condiția  $x_0 = x_1 = 1$ , identificăm constantele  $c_1$  și  $c_2$ , obținem

$$x_n = \frac{1}{4} \left( \left(2 + \sqrt{3}\right)^{2n-1} + \left(2 - \sqrt{3}\right)^{2n-1} \right).$$

Dar  $2 \pm \sqrt{3} = \frac{1}{2} (\sqrt{3} \pm 1)^2$ , deci vom avea

$$\begin{aligned} 2x_n - 1 &= \frac{1}{2^{2n}} \left( (\sqrt{3} + 1)^{4n-2} + (\sqrt{3} - 1)^{4n-2} \right) - 1 \\ &= \left( \frac{(1 + \sqrt{3})^{2n-1} + (1 - \sqrt{3})^{2n-1}}{2^n} \right)^2. \end{aligned}$$

Rămâne de arătat că numărul din paranteza este natural. Evident că acest număr este rațional, iar divizibilitatea cu  $2^n$  se dovedește, de exemplu, prin inducție, folosind faptul că expresia de la numărător, fie ea  $a_{2n-1}$ , satisface relația de recurență  $a_n - 2a_{n-1} - 2a_{n-2} = 0$ . □

## 3. EDIȚIA II – 19 AUGUST 2011

**Problema 1.** Se consideră numerele reale  $a_1, a_2, a_3$  și numerele complexe nenule  $z_1, z_2, z_3$  astfel încât  $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$  și

$$\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_3} + \frac{z_3}{z_1} = 1.$$

Determinați valorile posibile ale numărului

$$|a_1 z_1 + a_2 z_2 + a_3 z_3|.$$

ViitoriOlimpici.ro

*Soluție.* Avem

$$z_1^2 z_3 + z_2^2 z_1 + z_3^2 z_2 = z_1 z_2 z_3.$$

Apoi, prin conjugarea relației

$$\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_3} + \frac{z_3}{z_1} = 1,$$

obținem

$$\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} + \frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_3} + \frac{\bar{z}_3}{\bar{z}_1} = 1,$$

de unde

$$\frac{z_2}{z_1} + \frac{z_3}{z_2} + \frac{z_1}{z_3} = 1,$$

adică

$$z_3^2 z_1 + z_1^2 z_2 + z_2^2 z_3 = z_1 z_2 z_3.$$

Din aceste două egalități deducem că

$$\sum z_1^2 z_3 - z_3^2 z_1 = 0,$$

prin urmare

$$(z_1 - z_2)(z_2 - z_3)(z_3 - z_1) = 0.$$

Rezultă că sunt posibile doar următoarele trei situații:

$$1) z_1 = z_2 \Rightarrow z_1^2 + z_3^2 = 0 \Rightarrow z_3 = \pm i z_1 \Rightarrow |a_1 z_1 + a_2 z_2 + a_3 z_3| = \sqrt{(a_1 + a_2)^2 + a_3^2};$$

$$2) z_2 = z_3 \Rightarrow z_1^2 + z_3^2 = 0 \Rightarrow z_1 = \pm i z_3 \Rightarrow |a_1 z_1 + a_2 z_2 + a_3 z_3| = \sqrt{(a_3 + a_2)^2 + a_1^2};$$

$$3) z_1 = z_3 \Rightarrow z_1^2 + z_2^2 = 0 \Rightarrow z_2 = \pm i z_1 \Rightarrow |a_1 z_1 + a_2 z_2 + a_3 z_3| = \sqrt{(a_3 + a_1)^2 + a_2^2}.$$

□

**Problema 2.** Se consideră  $n \geq 3$  puncte, oricare trei necoliniare. Se trasează  $C_{n-1}^2 + 1$  segmente, având capetele în puncte dintre cele considerate. Arătați că oricare două puncte pot fi unite printr-o linie poligonală formată din segmente trasate.

Marius Perianu

*Soluție.* Presupunem prin absurd ca există două puncte  $A$  și  $B$  care nu pot fi unite printr-o linie poligonală formată din segmentele trasate. Notăm cu  $V(A)$  mulțimea punctelor care pot fi unite prin linii poligonale cu  $A$  (inclusiv punctul  $A$ ) și fie  $k = |V(A)|$  numărul de vârfuri. Deoarece  $B \notin V(A)$ , rezultă că  $k \leq n - 1$ .

Arătăm că celelalte  $n - k$  puncte nu sunt unite prin segmente cu puncte din  $V(A)$ . într-adevăr, dacă  $C \in V(A)$ ,  $D \notin V(A)$  și punctele  $C, D$  sunt unite printr-un segment, atunci o linie poligonală de la  $A$  la  $C$  se poate prelungi la o linie poligonală de la  $A$  la  $D$ , contradicție cu  $D \notin V(A)$ .

Astfel, numărul segmentelor netrasate (numărul perechilor de puncte între care nu s-a trasat un segment) este  $N \geq k(n - k) \geq n - 1$ , iar al celor trasate este  $C_{n-1}^2 + 1$ .

În total, am avea cel puțin  $n - 1 + C_{n-1}^2 + 1 = n - 1 + \frac{(n-1)(n-2)}{2} + 1 = C_n^2 + 1$  segmente, ceea ce este fals, deoarece între  $n$  puncte se pot trasa  $C_n^2$  segmente.  $\square$

**Problema 3.** Fie  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ , și  $a_1 = 1 < a_2 < \dots < a_{\varphi(n)}$  toate numerele relativ prime cu  $n$ , mai mici decât  $n$ . Arătați că numerele  $a_1, a_2, \dots, a_{\varphi(n)}$  sunt în progresie aritmetică dacă și numai dacă  $n$  este 6 sau număr prim sau o putere a lui 2.

Laurențiu Panaitopol

*Soluție.* Dacă  $n \in \{6\} \cup \{2^k \mid k \in \mathbb{N}^*\}$  sau este număr prim, atunci

$$a_1, a_2, \dots, a_{\varphi(n)}$$

sunt în progresie aritmetică.

Reciproc, dacă  $a_1, a_2, \dots, a_{\varphi(n)}$  sunt în progresie aritmetică, atunci:

a) dacă  $\varphi(n) = 1$ , atunci  $n = 2$ , iar dacă  $\varphi(n) = 2$ , atunci  $n = 3, 4, 6$ ;

b) dacă  $\varphi(n) \geq 3$ , avem situațiile:

- dacă  $a_2 = 2$ , atunci  $n$  este prim;

- dacă  $a_2 = 3$ , atunci  $a_k = 2k - 1$ ,  $k = \overline{1, \varphi(n)}$ , de unde rezultă că  $n$  este o putere a lui 2;

- dacă  $a_2 \geq 4$ , atunci, deoarece  $a_2 > 3$ , rezultă  $3 \mid n$  și  $3 \nmid a_2$ . Dar  $a_3 = 2a_2 - a_1 = 2a_2 - 1$ , și cum  $3 \nmid a_3$ , rezultă  $a_2 \equiv 1 \pmod{3}$ .

Dar  $n - 1 = a_{\varphi(n)} = a_1 + (\varphi(n) - 1)(a_2 - a_1) = 1 + (\varphi(n) - 1)(a_2 - 1)$ , deci  $n = 2 + (\varphi(n) - 1)(a_2 - 1)$ . De aici, cum  $a_2 \equiv 1 \pmod{3}$ , rezultă că  $n \equiv 2 \pmod{3}$ , fals, întrucât  $3 \mid n$ .  $\square$

#### 4. EDIȚIA III – 22 AUGUST 2012

**Problema 1.** Spunem că un număr complex  $z$  are proprietatea  $P$  dacă există  $m_z, n_z$  numere naturale, nu ambele nule, astfel încât

$$z^{m_z} = (1 + z)^{n_z} = 1.$$

a) Determinați numerele complexe cu proprietatea  $P$ ;

b) Pentru fiecare  $z$  cu proprietatea  $P$ , determinați perechile  $(m_z, n_z)$  corespunzătoare pentru care  $m_z + n_z = 2012$ .

ViitoriOlimpici.ro

*Soluție.* a) Fie  $\zeta_n = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$  rădăcina primitivă de ordin  $n$  a unității. Elementele mulțimilor  $A_n = \{\zeta_n - 1, \zeta_n^2 - 1, \dots, \zeta_n^{n-1} - 1\}$ ,  $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$  au proprietatea P (luăm  $m_z = 0$ ). De asemenea, elementele mulțimilor

$$B_m = \{1, \zeta_m, \zeta_m^2, \dots, \zeta_m^{m-1}\} \setminus \{-1\},$$

$m \in \mathbb{N}, m \geq 2$  au proprietatea P (luăm  $n_z = 0$ ).

În cazul în care  $m_z, n_z$  sunt ambele nenule, atunci  $z \in C(O, 1) \cap C(M, 1)$ , unde  $M$  este punctul de afix  $-1$ , prin urmare  $z \in \{\zeta_3, \zeta_3^2\}$ . În concluzie, numerele complexe care au proprietatea P sunt cele din

$$\left( \bigcup_{n=2}^{\infty} A_n \right) \cup \left( \bigcup_{m=2}^{\infty} B_m \right).$$

b) Dacă  $n \geq 2$  este divizor al lui 2012 și  $z \in A_n$ , atunci  $(m_z, n_z) = (0, 2012)$ ; pentru celelalte elemente din  $\bigcup_{n=2}^{\infty} A_n$  nu există perechi  $(m_z, n_z)$  cu proprietatea cerută. La fel, dacă  $m \geq 2$  este divizor al lui 2012 și  $z \in B_m$ , atunci  $(m_z, n_z) = (2012, 0)$ ; pentru celelalte elemente din  $\bigcup_{m=2}^{\infty} B_m$  nu există perechi  $(m_z, n_z)$  cu proprietatea cerută.

Dacă  $z \in \{\zeta_3, \zeta_3^2\}$ , nu există perechi  $(m_z, n_z)$  cu ambele componente nenule: suma  $m_z + n_z$  se divide cu 3, în timp ce 2012 nu se divide cu 3.  $\square$

**Problema 2.** Fie  $ABCD$  un pătrat de centru  $O$ . Dacă  $P \in [AD]$ , demonstrați că există punctele  $M \in [AB]$  și  $N \in [BC]$  astfel încât  $O$  este ortocentrul triunghiului  $MNP$  dacă și numai dacă  $3AP \geq 2AD$ .

Gabriel Popa și Paul Georgescu

*Soluție.* Raportăm planul la un reper cartezian astfel încât

$$O(0, 0); A(-1, -1); B(1, -1); C(1, 1); D(-1, 1).$$

Fie  $M(a, -1), N(1, b), P(-1, c)$  puncte cu proprietatea că  $O$  este ortocentrul triunghiului  $MNP$ . Din  $OP \perp MN$  și  $OM \perp PN$  rezultă că  $\vec{OP} \cdot \vec{MN} = 0$ , respectiv  $\vec{OM} \cdot \vec{PN} = 0$ . Cum  $\vec{OP}(-1, c), \vec{MN}(1-a, b+1), \vec{OM}(a, -1), \vec{PN}(2, b-c)$ , obținem că  $a-1+bc+c=0$ , respectiv  $2a-b+c=0$ . Eliminând  $a$  între cele două relații, deducem că  $2-c=b(2c+1)$ .

Situația  $c = -\frac{1}{2}$  conduce la o contradicție, deci putem scrie  $b = \frac{2-c}{2c+1}$ . Impunem condiția  $-1 \leq b \leq 1$  și rezultă că  $c \in [\frac{1}{3}, 1]$ , prin urmare  $3AP \geq 2AD$ .

Reciproc, să presupunem că  $3AP \geq 2AD$ , adică  $c \in [\frac{1}{3}, 1]$ . Atunci  $b = \frac{2-c}{2c+1} \in [-1, 1]$ , iar  $a = \frac{b-c}{2} = \frac{1-c-c^2}{2c+1} \in [-1, 1]$ , după cum se constată ușor. Punctele  $M\left(\frac{1-c-c^2}{2c+1}, -1\right)$  și  $N\left(1, \frac{2-c}{2c+1}\right)$  completează un triunghi  $MNP$  al cărui ortocentru este  $O$ .  $\square$

**Problema 3.** Demonstrați că nu există funcții  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  pentru care să fie îndeplinite, simultan, condițiile:

- (i)  $f(1) = 1$ ;
- (ii) există  $M > 0$  astfel încât  $-M \leq f(x) \leq M, \forall x \in \mathbb{R}$ ;
- (iii)  $f\left(x + \frac{1}{x^2}\right) = f(x) + \left(f\left(\frac{1}{x}\right)\right)^2, \forall x \in \mathbb{R}^*$ .

Olimpiadă Iran

*Soluție.* Luând  $x = 1$  în (iii) obținem că  $f(2) = 2$ , prin urmare  $M \geq 2$ . Fie  $n \in \mathbb{N}^*$  cel mai mic număr natural cu proprietatea că  $f(x) < n, \forall x \in \mathbb{R}^*$ ; avem că  $n > 2$ .

Putem găsi  $a \in \mathbb{R}^*$  astfel încât  $f(a) \geq n - 1$  și atunci

$$\left(f\left(\frac{1}{a}\right)\right)^2 = f\left(a + \frac{1}{a^2}\right) - f(a) < n - (n - 1) = 1,$$

prin urmare  $f\left(\frac{1}{a}\right) > -1$ . Aplicând (iii) pentru  $x = \frac{1}{a}$ , obținem că

$$(n - 1)^2 \leq (f(a))^2 = f\left(\frac{1}{a} + a^2\right) - f\left(\frac{1}{a}\right) < n - 1.$$

Deducem că  $n \in \{1, 2\}$  și astfel am ajuns la o contradicție. □

### 5. EDIȚIA IV – 23 AUGUST 2013

**Problema 1.** *Determinați numerele naturale nenule  $n$  pentru care se poate construi o mulțime de numere complexe  $M$ , având  $n$  elemente, cu proprietățile:*

- (i)  $|z| = 1$ , oricare ar fi  $z \in M$ ;
- (ii)  $\sum_{z \in M} z = 0$ ;
- (iii)  $z + w \neq 0$ , oricare ar fi  $z, w \in M$ .

ViitoriOlimpici.ro

*Soluție.* Evident, valorile  $n = 1$  și  $n = 2$  nu convin. Orice număr impar  $n \geq 3$  este bun: alegem  $M = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}$ .

Valoarea  $n = 4$  nu convine: dacă  $M = \{a, b, c, d\}$ , atunci  $a, b, c, d$  vor fi afixele vârfurilor unui patrulater inscriptibil  $ABCD$ . Notăm cu  $P(p)$  și  $Q(q)$  mijloacele laturilor  $AB$ , respectiv  $CD$ . Cum  $2p = a + b$  și  $2q = c + d$ , condiția  $a + b + c + d = 0$  arată că  $O$  este mijlocul segmentului  $PQ$ . Diametrul care trece prin mijlocul unei coarde (care nu este ea însăși diametru) este perpendicular pe acea coardă, prin urmare  $PQ$  este perpendiculară atât pe  $AB$ , cât și pe  $CD$  și  $O$  se află la egală distanță de aceste două coarde. Rezultă că patrulaterul  $ABCD$  este dreptunghi, ceea ce contrazice (iii).

Orice număr par  $n \geq 6$  este bun: alegem

$$M = \{z \in \mathbb{C} \mid z^{n-3} = 1\} \cup \{wz \mid z^3 = 1\},$$

unde  $w = \cos \alpha + i \sin \alpha$ , cu  $\alpha \notin \{r\pi \mid r \in \mathbb{Q}\}$ .

în concluzie,  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2, 4\}$ . □

**Problema 2.**

a) *Fie  $ABCD$  un patrulater convex. Arătați că discurile având ca diametre laturile  $AB, BC, CD$  și  $DA$  acoperă în întregime interiorul patrulaterului  $ABCD$ .*

*Gazeta Matematică 6-7-8/2013*

b) *Fie  $ABCD$  un patrulater. Demonstrați că discurile având ca diametre segmentele  $AB, AC$  și  $AD$  acoperă în întregime interiorul triunghiului  $BCD$ .*

*Soluție.* a) Fie  $M$  un punct în interiorul patrulaterului  $ABCD$ ; atunci

$$\angle AMB + \angle BMC + \angle CMD + \angle DMA = 360^\circ.$$

Rezultă că cel puțin unul dintre cele patru unghiuri are măsura de măcar  $90^\circ$ . Dacă  $\angle AMB$  este un astfel de unghi,  $M$  aparține discului de diametru  $AB$  și, de aici, cerința problemei.

b) Notăm cu  $P$ ,  $Q$  și  $R$  proiecțiile vârfului  $A$  pe dreptele  $BC$ ,  $CD$  respectiv  $DB$ . Indiferent de natura patrulaterului  $ABCD$  (convex sau concav), patrulateretele de vârfuri  $BPAR$ ,  $CPAQ$  și  $DQAR$  sunt înscrise în cercurile de diametre  $AB$ ,  $AC$  respectiv  $AD$  și, împreună cu interioarele lor, acoperă interiorul triunghiului  $BCD$ . Cu atât mai mult, discurile având ca diametre segmentele  $AB$ ,  $AC$  și  $AD$  vor acoperi interiorul triunghiului  $BCD$ .  $\square$

*Soluție alternativă.* Vom demonstra mai întâi următoarea:

*Lemă.* Dacă  $ABC$  este un triunghi oarecare, discurile având ca diametre laturile  $AB$  și  $AC$  acoperă în întregime interiorul triunghiului.

Fie  $D$  proiecția punctului  $A$  pe dreapta  $BC$ . Dacă  $D$  se află în interiorul segmentului  $BC$ , atunci interiorul tringhiului  $ABD$  este acoperit de discul de diametru  $AB$  iar interiorul tringhiului  $ACD$  este acoperit de discul de diametru  $AC$ . Dacă  $D$  se află pe semidreapta opusă semidreptei ( $BC$ , interiorul tringhiului  $ABC$  este acoperit de discul de diametru  $AC$ . în sfârșit, dacă  $D$  se află pe semidreapta opusă semidreptei ( $CB$ , interiorul tringhiului  $ABC$  este acoperit de discul de diametru  $AB$ ; cu aceasta, demonstrația lemei este completă.

Ambele cerințe ale problemei sunt simple consecințe ale lemei. La b), se impune tratarea separată a cazului în care interiorul triunghiului  $BCD$  nu este inclus în interiorul patrulaterului  $ABCD$ .

**Problema 3.** Se dau  $m$  numere naturale distincte din mulțimea  $\{1; 2; \dots; n\}$ . Demonstrați că putem alege câteva dintre ele, cu suma  $S$ , astfel încât

$$0 \leq S - \frac{m(m+1)}{2} \leq n + \sqrt{2n} - m.$$

Adrian Zahariuc

*Soluție.* Fie  $a_1 < a_2 < \dots < a_m$  cele  $m$  numere date. Notăm cu  $j$  indicele minim pentru care

$$a_1 + a_2 + \dots + a_j \geq \frac{m(m+1)}{2}$$

și cu  $i$  indicele maxim pentru care

$$a_i + a_{i+1} + \dots + a_j \geq \frac{m(m+1)}{2}.$$

Notând  $S = a_i + a_{i+1} + \dots + a_j$ , este îndeplinită prima inegalitate.

Din maximalitatea lui  $i$ , avem

$$S \leq a_i + \frac{m(m+1)}{2} - 1. \quad (1)$$

Din minimalitatea lui  $j$ , deducem că

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{j-1} < \frac{m(m+1)}{2} \leq a_i + \dots + a_{j-1} + a_j \Rightarrow$$

$$a_j > a_1 + \dots + a_{i-1} \geq 1 + 2 + \dots + (i-1) = \frac{i(i-1)}{2}.$$

Dar  $n \geq a_j$ , și prin urmare  $i < \sqrt{2n} + 1$ . Rezultă că

$$a_i \leq n - m + i < n - m + \sqrt{2n} + 1. \quad (2)$$

Din relațiile (1) și (2) obținem că, pentru  $S$ , este îndeplinită (strict) și a doua inegalitate din enunț.  $\square$