

Etapa 7, Problema 1

Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ și numerele $a_1, a_2, \dots, a_n \in (0, \infty)$. Pentru fiecare $k \in \{2, 3, \dots, n\}$, definim numerele s_k prin

$$s_k = a_1 + a_2 + \dots + a_k - k(a_1 a_2 \dots a_k)^{\frac{1}{k}}.$$

a) Demonstrați că, oricare ar fi $k \in \{2, 3, \dots, n-1\}$, avem $s_{k+1} \geq s_k$.

b) Arătați că $a_1 + a_2 + \dots + a_n - n(a_1 a_2 \dots a_n)^{\frac{1}{n}} \geq \max_{1 \leq i < j \leq n} (\sqrt{a_i} - \sqrt{a_j})^2$.
