

**PROBLEME
PENTRU ETAPA JUDEȚEANĂ**

ABSTRACT. În vederea participării cu succes la concursurile școlare prezentăm câteva probleme de concurs însoțite de rezolvări și comentarii.

Lecția se adresează clasei a V-a

Autor: Ion Cicu, Profesor, Școala nr. 96, București

Problema 1: Împărțind numărul natural a la numărul natural b obținem restul 6. Împărțind numărul b la a obținem restul 5. Aflați numerele a și b știind că suma lor este cea mai mică posibil.

Șt. Vasilescu, M. Fianu

Soluție: Din "Împărțind numărul natural a la numărul natural b obținem restul 6" avem

$$a = b \cdot x + 6 \quad b > 6 \quad (1)$$

Din "Împărțind numărul b la a obținem restul 5" avem

$$b = a \cdot y + 5 \quad a > 5 \quad (2)$$

introducând relația (1) în relația (2) avem

$$b = (b \cdot x + 6) \cdot y + 5$$

sau

$$b = b \cdot x \cdot y + 6 \cdot y + 5 \quad (3)$$

Dacă $x \cdot y \geq 1$ atunci relația (3) nu poate fi adevărată.

Așadar, $x \cdot y = 0$ ceea ce înseamnă x sau y este 0.

Dacă $y = 0$ atunci $b = 5$ ceea ce este în contradicție cu afirmația din (1) ($b > 6$). Rezultă atunci că $x = 0$.

Pentru $x = 0$ relația (3) devine

$$b = 6 \cdot y + 5$$

iar din relația (1) deducem că

$$a = 6$$

Cu acestea suma devine

$$a + b = 6 \cdot y + 11$$

Deoarece trebuie să avem cea mai mică sumă posibilă și $y \neq 0$ vom lua $y = 1$ și obținem

$$a + b = 17$$

de unde

$$b = 11$$

Problema 2: Mulțimea numerelor naturale se împarte în submulțimi astfel

$$\{0\}; \{1, 2\}; \{3, 4, 5\}; \{6, 7, 8, 9\}; \dots$$

unde prima submulțime conține primul număr natural, a doua submulțime conține următoarele două numere naturale și așa mai departe.

Determinați

- cu ce număr natural începe cea de-a 50-a submulțime;
- suma elementelor celei de-a 50-a submulțime;
- suma elementelor primelor 50 de submulțimi.

Nicolae Baci

Soluție: Pentru a putea rezolva problema trebuie găsită o regulă după care putem determina primul element al fiecărei submulțimi. Să observăm că a doua submulțime începe cu 1 care poate fi scris $0 + 1$. 0 este primul element din prima submulțime, iar 1 este cardinalul primei submulțimi. A treia submulțime începe cu 3 care poate fi scris $1 + 2$, adică primul element din a doua submulțime plus cardinalul celei de a doua submulțimi. Pentru submulțimea a patra avem $6 = 3 + 3$, deci aceeași regulă ca mai sus. Dar primul element din submulțimea a treia este $1 + 2$, deci primul element din submulțimea a patra este $1 + 2 + 3$. La următoarea submulțime, a cincea, avem primul element $6 + 4$ (după regula "primul element al submulțimii a patra plus cardinalul ei") sau $1 + 2 + 3 + 4$ (având în vedere cum l-am scris pe 6). Deducem că primul element al submulțimii n este $1 + 2 + 3 + \dots + (n - 1)$ și cum $1 + 2 + 3 + \dots + (n - 1) = \frac{n(n - 1)}{2}$ avem că primul element al submulțimii n este $\frac{n(n - 1)}{2}$. De aici problema devine simplă.

a) Cea de-a 50-a submulțime începe cu $\frac{50 \cdot 49}{2} = 25 \cdot 49 = 1225$.

b) Pentru a stabili ultimul element al celei de-a 50-a submulțimi trebuie să știm primul element al celei de a 51-a submulțimi. Acesta este $\frac{51 \cdot 50}{2} = 1275$.

Avem de calculat suma $S = 1225 + 1226 + 1227 + \dots + 1274$.

Această sumă se poate calcula în două feluri:

1.

$$\begin{aligned}
 S &= 1 + 2 + 3 + \dots + 1225 + \dots + 1274 - (1 + 2 + 3 + \dots + 1224) = \\
 &= \frac{1274 \cdot 1275}{2} - \frac{1224 \cdot 1225}{2} = 62475.
 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
 S &= 1225 + 1225 + 1 + 1225 + 2 + \dots + 1225 + 49 = \\
 &= 1225 \cdot 50 + 1 + 2 + \dots + 49 = 1225 \cdot 50 + \frac{49 \cdot 50}{2} = 62475.
 \end{aligned}$$

c) Suma elementelor primelor 50 de submulțimi înseamnă

$$T = 1 + 2 + 3 + \dots + 1274 = \frac{1274 \cdot 1275}{2} = 812175.$$

Problema 3: Aflați numerele naturale m și n pentru care numărul $5^m + 6^n + 2$ este pătrat perfect.

Maria Mihuț

Soluție: Notăm $u(n)$ cifra unităților lui n . Dacă $m > 0$ și $n > 0$, atunci $u(5^m) = 5$ și $u(6^n) = 6$, de unde rezultă $u(5^m + 6^n + 2) = 3$. Dar un pătrat perfect nu poate avea cifra unităților egală cu 3. Așadar, pentru $m > 0$ și $n > 0$ numărul nu poate fi pătrat perfect.

Trebuie să analizăm cazurile în care cel puțin unul dintre numerele m sau n este egal cu 0.

Dacă $n = 0$ și $m > 0$ numărul devine $5^m + 3$ și $u(5^m + 3) = 8$, deci nu este pătrat perfect (un pătrat perfect nu poate avea cifra unităților 8).

Dacă $m = 0$ și $n > 0$ numărul devine $6^n + 3$ Care nu este pătrat perfect deoarece numărul se divide cu 3, dar nu se divide cu 9 (un pătrat perfect care se divide cu numărul prim p trebuie să se dividă și cu p^2).

În sfârșit, dacă $n = m = 0$ numărul devine 4 care este pătrat perfect.

În concluzie, numărul este pătrat perfect pentru $n = m = 0$.

Problema 4: Arătați că nu există $n \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \overline{aaaa}.$$

Vasile Șerdean

Soluție: Avem

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = a \cdot \overline{1111} = a \cdot 11 \cdot 101$$

și cum

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

avem

$$n(n+1) = 2 \cdot a \cdot 11 \cdot 101.$$

Trebuie să privim produsul $2 \cdot a \cdot 11 \cdot 101$ ca un produs de două numere consecutive.

Dacă unul dintre factori ar fi 101 atunci $n = 101$ sau $n + 1 = 101$.

Pentru $n = 101$ trebuie să avem $2 \cdot a \cdot 11 = 102$ și nu există a număr natural pentru care egalitatea să fie adevărată.

Pentru $n + 1 = 101$ trebuie să avem $2 \cdot a \cdot 11 = 100$ și nu există a număr natural pentru care egalitatea să fie adevărată.

Dacă unul dintre numerele consecutive ar fi 101 înmulțit cu unul sau mai mulți dintre factorii 2, a sau 11 numărul rămas are numai două cifre (să nu uităm că a este cifră), deci nu putem vorbi de produs de două numere consecutive.

În concluzie, nu există $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $1 + 2 + 3 + \dots + n = \overline{aaaa}$.

Problema 5: Se consideră numerele naturale consecutive

$$1; 2; 3; 4; \dots; 2010; 2011.$$

Înlocuim, pe rând, câte două numere (alese la întâmplare) cu diferența dintre cel mai mare și cel mai mic dintre ele, până când rămânem cu un singur număr. Ce paritate are acest ultim număr? Justificați. (*Enunț modificat*)

Vasile Șerdean și Alexandru Blaga

Soluție: Pentru rezolvarea problemei trebuie să ne amintim

Diferența a două numere de aceeași paritate este un număr par.

Diferența a două numere de parități diferite este un număr impar.

Acum, în șirul de numere din problemă sunt 1005 numere pare (numerele pare din șir au forma $2k$, unde $k \in \{1, 2, 3, \dots, 1005\}$) și 1006 numere impare (numerele impare din șir au forma $2k - 1$, unde $k \in \{1, 2, 3, \dots, 1006\}$).

Să observăm că oricum am alege două numere de aceeași paritate, ele se vor înlocui cu un număr par.

Presupunând că alegem numai perechi de numere de aceeași paritate vom rămâne cu un număr par deoarece numărul de numere impare este par (1006) deci toate diferențele se vor transforma în numere pare.

Dacă alegem un număr impar și un număr par, atunci vom rămâne cu un număr impar de numere impare.

Dar, cele două numere alese se vor înlocui cu un număr impar, deci vom avea de fapt tot un număr par de numere impare.

Cum numărul de numere impare este mereu par înseamnă că în final vom rămâne cu un număr par.

Problema 6: Pentru a număr natural definim numerele $x = 2a + 3$ și $y = 4a + 9$. Aflați câtul și restul împărțirii lui y la x .

Olimpiadă București

Soluție: Putem scrie

$$y = 4a + 9 = 4a + 6 + 3 = 2(2a + 3) + 3$$

adică

$$y = 2x + 3 \quad (*)$$

Dacă $x > 3$ atunci relația (*) reprezintă teorema împărțirii cu rest a lui y la x și atunci

- Câtul împărțirii lui y la x este 2
- Restul împărțirii lui y la x este 3.

Dacă $x = 3$, din $2a + 3 = 3$ obținem $a = 0$ și atunci $y = 9$. În acest caz

- Câtul împărțirii este 3
- Restul împărțirii este 0

Problema 7: Aflați suma cifrelor numărului $\overline{abc} + 1$ știind că $a + b + c = 20$.

Soluție: Discuția este legată de suma $c + 1$, dacă trece sau nu peste ordin.

Așadar, pentru $c \leq 8$ avem $c + 1 \leq 9$ și atunci

$$\overline{abc} + 1 = \overline{ab(c+1)}$$

și suma

$$a + b + c + 1 = 21$$

Dacă $c = 9$ avem $\overline{ab9} + 1$ și $a + b = 11$. De această dată problema se pune în legătură cu $b + 1$; trece sau nu trece peste ordin?

Dacă $b \leq 8$, atunci $b + 1 \leq 9$ și avem

$$\overline{ab9} + 1 = \overline{a(b+1)0}$$

și suma

$$a + b + 1 + 0 = 12$$

Dacă $b = 9$ avem $\overline{a99} + 1c$ și $a = 2$. În acest caz

$$299 + 1 = 300$$

și

$$3 + 0 + 0 = 3$$

În concluzie, suma cifrelor numărului $\overline{abc} + 1$ este: 21 dacă $c \leq 8$; 12 dacă $c = 9$ și $b \leq 8$ sau 3 dacă $c = 9$ și $b = 9$.

Problema 8: Fie numerele naturale x, y, z , $x < y < z$ astfel încât $3^x + 3^y + 3^z = 2475$. Arătați că $M = 2 \cdot x + 3 \cdot y + 4 \cdot z$ este pătrat perfect.

Soluție: Trebuie să aflăm x, y și z . Faptul că x, y, z sunt exponenți ai unor puteri cu aceeași bază, 3 ne sugerează ideea de a trece numărul 2475 din baza 10 în baza 3.

Avem:

$$2457 = 3 \cdot 819 + 0$$

$$819 = 3 \cdot 273 + 0$$

$$273 = 3 \cdot 91 + 0$$

$$91 = 3 \cdot 30 + 1$$

$$30 = 3 \cdot 10 + 0$$

$$10 = 3 \cdot 3 + 1$$

$$3 = 3 \cdot 1 + 0$$

$$1 = 3 \cdot 0 + 1$$

Din cele de mai sus avem

$$2457_{(10)} = 10101000_{(3)}$$

Trecerea numărului 10101000 din baza 3 în baza 10 se face astfel:

$$10101000_{(3)} = 1 \cdot 3^7 + 0 \cdot 3^6 + 1 \cdot 3^5 + 0 \cdot 3^4 + 1 \cdot 3^3 + 0 \cdot 3^2 + 0 \cdot 3^1 + 0 \cdot 3^0$$

Adică

$$2457 = 3^7 + 3^5 + 3^3$$

De aici și din $3^x + 3^y + 3^z = 2475$, cum $x < y < z$ deducem

$$x = 3, y = 5, z = 7$$

Cu acestea $M = 2 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + 4 \cdot 7 = 49$ care este pătrat perfect ($7^2 = 49$).

Problema 9: Considerăm mulțimea $A = \{2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \mid a, b, c \in \mathbb{N}\}$. Arătați că printre oricare nouă elemente ale mulțimii A există cel puțin două al căror produs este pătrat perfect.

Soluție: În rezolvarea problemei trebuie să ținem seama de urătoarele:

1. Un număr de forma $2^a \cdot 3^b \cdot 5^c$ este pătrat perfect dacă toți exponenții sunt numere pare;
2. Suma a două numere de aceeași paritate este un număr par;
3. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.

În legătură cu elementele mulțimii A ne punem întrebarea câte dintre acestea au exponenți de parități diferite.

Exponentul a poate fi par sau impar, deci 2 posibilități. La fel pentru exponenții b sau c . Rezultă că avem $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ elemente cu exponenți diferiți.

Putem proceda și astfel. Notăm i exponenții impari și p exponenții pari. Pentru exponenții a, b, c avem următoarele cazuri posibile:

$$i, i, i; i, i, p; i, p, i; p, i, i; i, p, p; p, i, p; p, p, i; p, p, p$$

în total 8 variante.

Conform principiului cutiei, având 8 variante posibile și 9 numere vor exista cel puțin două numere care să aibă aceeași formă a exponenților.

Înmulțind aceste două elemente exponenții produsului sunt numere pare, așadar produsul este un pătrat perfect. (Exemplu: Dacă $x = 2^i \cdot 3^p \cdot 5^i$ și $y = 2^i \cdot 3^p \cdot 5^i$, atunci $x \cdot y = 2^{i+i} \cdot 3^{p+p} \cdot 5^{i+i} = 2^{2i} \cdot 3^{2p} \cdot 5^{2i}$)

Problema 10: Un pătrat cu latura de 5 cm se împarte în pătrățele cu latura de 1 cm, în total 25 de pătrățele. Fiecare pătrățel se numerotează cu numere naturale de la 1 la 25 (fiecare număr apare o singură dată). Există o numerotare astfel încât exact pe o linie sau pe o coloană suma să fie un număr par?

Soluție: Răspunsul este NU, iar justificarea este următoarea:

Suma tuturor numerelor înscrise în pătrat este

$$1 + 2 + 3 + \dots + 25 = \frac{25 \cdot 26}{2} = 325$$

Dacă notăm L_1, L_2, L_3, L_4, L_5 suma numerelor de pe liniile 1, 2, 3, 4 respectiv 5, atunci

$$L_1 + L_2 + L_3 + L_4 + L_5 = 325$$

Presupunem că suma de pe o singură linie este număr par. Atunci celelalte patru sume sunt numere impare.

În aceste condiții, în suma $L_1 + L_2 + L_3 + L_4 + L_5$ apar 4 numere impare și un număr par, ceea ce înseamnă că $L_1 + L_2 + L_3 + L_4 + L_5$ este un număr par.

Dar $L_1 + L_2 + L_3 + L_4 + L_5 = 325$, adică număr impar.

Contradicția apare de la presupunerea pe care am făcut-o și anume că exact pe o linie suma este un număr par. Așadar presupunerea nu este corectă.

La fel se procedează dacă în locul liniilor vom considera coloanele.