Problemă. Să se determine numerele naturale a, b, c, mai mari decât 1 pentru care $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ este număr natural.

* * *

Soluţie. Relaţia $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ fiind simetrică în a, b, c putem presupune $a \leq b \leq c$.

Cum $c \geq b \geq a \geq 2$, avem

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \leq \frac{3}{2},$$

deci $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$.

Dacă $a \geq 4$ atunci $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \leq \frac{3}{4}<1$, deci acest caz nu este posibil. Rezultă că $a \in \{2,3\}$.

Dacă $a=2$ trebuie ca $\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{2}$. Dacă $b \geq 5$ atunci $\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \leq \frac{2}{5}<\frac{1}{2}$. Rezultă atunci că $b \in \{3,4\}$.
Pentru $b=3$ rezultă $c=6$, iar dacă $b=4$ rezultă $a=4$.

Dacă $a=3$ trebuie ca $\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{2}{3}$. Dacă $b \geq 4$ atunci $\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \leq \frac{1}{2}<\frac{2}{3}$. Rezultă atunci că $b=3$.
Pentru $b=3$ rezultă $c=3$.

În concluzie, renunţând la condiţia $a \leq b \leq c$, obţinem că (a,b,c) poate fi (3,3,3); (2,4,4); (4,2,4); (4,4,2); (2,3,6); (2,6,3); (3,2,6); (3,6,2); (6,2,3); (6,3,2).