SOLUȚIE

Problema 2.

Fie z_1, z_2, z_3 numere complexe cu același modul, astfel încât $z_1 + z_2 + z_3 = z_1 z_2 z_3 = 1$. Demonstrați că z_1, z_2, z_3 sunt afixele vârfurilor unui triunghi dreptunghic isoscel.

***

Soluție:

Avem $|z_1| = |z_2| = |z_3|$ și $z_1 z_2 z_3 = 1$, de unde deducem $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$. Rezultă că punctele $A(z_1), B(z_2), C(z_3)$ sunt situate pe cercul trigonometric.

Din relația lui Sylvester $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH}$ și din egalitatea $z_1 + z_2 + z_3 = 1$, deducem că afixul ortocentrului H al triunghiului ABC este $z_H = 1$ și atunci ΔABC este dreptunghic.

Putem presupune $A = H$, adică $z_1 = 1$ și obținem $z_2 = i,\ z_3 = -i$. Acum se verifică ușor că ΔABC este și isoscel.