# "OLIMPIADA" INTERNAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ "FORMULA OF UNITY" / "THE THIRD MILLENIUM" 2013/2014

Abstract. Comments on some of the problems presented at the new integrated International Mathematical Olympiad "Formula of Unity" / "The Third Millenium", 2013/2014.

Data: 7 februarie 2014.
Autor: Dan Schwarz, Bucureşti.

## 1. Introducere

Aceste comentarii asupra **Olimpiadei Internaţionale de Matematică "Formula of Unity" / "The Third Millenium"**, 2013/2014, reflectă, ca de obicei, opinia personală a autorului. Ele sunt adăugate la o prezentare selectivă a probelor de concurs.[1]

Voi indica prin culoarea roşie eventualele erori, sau notaţiile abuzive din enunţurile originale, şi prin culoarea verde varianta de preferat (sau care lipsea din enunţ sau soluţie). Voi folosi în mod predilect şi culoarea albastră pentru comentariile de natură personală.

## 2. Prezentare

Acest nou eveniment, aflat la a doua ediţie, este se pare o continuare al unuia mai vechi, numit **"The Third Millenium"**. *De facto*, **"Formula of Unity"** este o traducere din expresia esperanto **"Formulo de Integreco"**, pe care, cred, grupul de lobby spaniol implicat l-a propus (deşi un robot de traducere oferă mai degrabă **"Formula of Integrity"**, ceea ce este oarecum comic ...). Limbile oficiale sunt rusa, engleza, spaniola şi esperanto!

---

[1] Adresele de Internet sunt

`http://formulo.org/`
`http://www.formulo.org/en/olimpiada/`
`http://www.euler-foundation.org/`

iar pentru clip-ul românesc

`https://www.facebook.com/ssmr.ro`
`https://www.youtube.com/watch?v=zLN7bZGSs50`

Lipsesc multe probleme, la care nu am găsit interesul de a fi prezentate. Ordinea este dinspre clasa a XII-a către clasa a VI-a, căci multe probleme sunt reluate, cu versiunea "cea mai grea" la clasa cea mai mare. Problemele sunt cele ale primei etape, căci cele ale etapei finale nu au fost postate (nici pentru ediţia trecută măcar). Fiecare clasă a avut 6 probleme de rezolvat, fiecare notată cu un maxim de 7 puncte, deci cu un total maxim posibil de 42 de puncte. Pentru ascensiunea la faza următoare erau suficiente şi 18 puncte.

Competiţia se desfăşoară în două etape. Prima – de calificare pentru cea de-a doua – este prin corespondenţă, acordându-se 3(trei!) săptămâni pentru rezolvarea problemelor postate pe site; a doua s-a desfăşurat "în timp real" în ianuarie 2014, şi conduce la acordarea de premii şi invitaţii la o tabără de vară de matematică, în Rusia.

Dintre obiectivele declarate (de organizatori) citez

> ... our common goal of rising school student interest in mathematics. You may organize participation of students from a class, a school, or an entire town or city. However, it is important that students participate voluntarily and work individually ...
>
> To step up the abilities and to give the complementary education to schoolchildren from the countryside and small towns, where they have a lesser opportunity to satisfy their interest to science.
>
> To investigate the potential of the synthesis of the two lines in the area of Education Sciences, both of them having been developed for longer than 50 years – the I. P. Ivanov's[2] methodology of collective creative education and Leningrad (St. Petersburg) system of gifted children development at scientific clubs and summer camps.

Printre ţările participante, dincolo de grosul din Rusia (nenumărate oraşe şi regiuni), Bielorusia şi Ucraina, s-au mai numărat Canada, Ecuador, Israel, România, Spania.

După umila mea părere, nivelul este comparativ cu cel al concursului "Cangurul", ceea ce se potriveşte cu caracterul general populist şi paternalist al concursului. Cele ce urmează vor explica (sper eu) raţiunea şi *pourquoi*-ul acestor comentarii.

Impulsul a fost dat de clip-ul de 2'04" intitulat "Elevi de nivel mondial", pe care îl puteţi urmări la adresele oferite în pagina precedentă. Desigur, titlul mi-a trezit interesul, şi astfel am ajuns să mă scufund (aproape să mă înec) în universul acestui topic. Realizatoarea Alisa Logreanu, probabil de la o *media* locală din Turnu-Severin, recită din *off*

> Patru elevi de la Colegiul Naţional Traian (şi atât – n-ar fi stricat să se anunţe şi localitatea) au avut ocazia să participe la olimpiada internaţională (sic!) organizată de universitatea din Sankt Petersburg, în parteneriat cu societăţile de ştiinţe matematice din Rusia (nu cred că sunt mai multe - o ţară are **o** Societate de Ştiinţe Matematice).

[2] Chiar merită citite cele câteva pagini care descriu această metodă, dezvoltată în timpul lui Makarenko! o imixtiune mai "comunistă" decât aceasta în psihologie, sociologie şi pedagogie, de mult n-am mai văzut ...

> Subiectele sunt **mult peste nivelul competiţiilor din România** (sublinierea mea), aşa încât performanţa elevilor noştri este cu atât mai notabilă.
>
> La nivel internaţional au participat 600 dintre **cei mai buni elevi din lume** (tot sublinierea mea).

Unii dintre participanţi, care au avut şi ei câteva cuvinte, au mai modulat aceste superlative, spunând că ”subiectele au fost de un grad de dificultate destul de ridicat, dar ne-am descurcat”. Directoarea Colegiului, Manuela Prajea, a precizat faptul că ”cei 600 de participanţi la faza a doua au fost cei calificaţi după prima rundă, la care au participat zeci de mii de elevi de pe mapamond” (deci cei mai buni dintre **participanţii de la prima rundă**; *à propos*, site-ul oficial anunţă doar un pic peste 5000 de participanţi acolo).

> Câştigătorii vor avea ocazia să participe la o tabără de matematică în vara acestui an, care va avea loc în Rusia (nu, nu **anul** va avea loc în Rusia, ci **tabăra**; topica normală din limba română este ”o tabără de matematică ce va avea loc în Rusia în vara acestui an”, şi am evitat şi cacofonia ”matematică care”!).

---

Îmi aleg cuvintele cu grijă. Iniţiativa este lăudabilă. Concursuri şi tabere de matematică, la orice nivel, sunt mai mult decât bine-venite. Este evident că acesta este mai degrabă ce se numeşte de obicei *a grassroots competition*, cu acest scop declarat destul de deschis. Ceea ce nu cred că este bine, pe de o parte, este faptul că acest concurs a fost ţinut oarecum ”în secret” (nu-mi imaginez că alte licee, din alte oraşe din ţară, în cunoştinţă de cauză, n-ar fi avut niciunul dorinţa de a participa) – mi se trezesc reminiscenţe de concursul ITYM (mult timp feuda celor din Iaşi), sau proiectele NASA (fief-ul liceului Vianu din capitală); iar pe de altă parte, chiar trădarea de principiu a scopului asumat al concursului, prin superlative ne-cerute şi exagerări ne-dorite. Nu cred că acei elevi din Turnu-Severin se consideră neapărat ei înşişi ”de nivel mondial”, dar cred şi văd că se bucură de a participa la un eveniment internaţional, ceea ce este de bine. Iar calificarea problemelor date ca fiind ”mult peste nivelul competiţiilor din România” este un sperjur şi o insultă la adresa activităţilor matematice, la adresa elevilor, profesorilor şi specialiştilor din România, şi la adresa Societăţii de Ştiinţe Matematice din România (SSMR), care a ales să găzduiască acest clip, fără a-l examina în prealabil (presupun).

Iată de ce urmez cu prezentarea câtorva dintre aceste probleme, pentru a ne putea face o idee bazată pe fapte, şi nu pe zvonuri sau auto-mulţumire; *what's good for the goose is good for the gander.*[3]

---

[3] *Ceea ce este bun pentru gâscă este bun şi pentru gânsac*, s-ar traduce pe româneşte, şi sună destul de exotic şi ocult ca să-mi placă ...

## 3. Clasa a XII-a

**Subiectul** (3)**.** *Numim o bază de numeraţie $b$* ***confortabilă*** *dacă există un număr prim $p$ care scris în baza $b$ conţine fiecare dintre cifrele bazei exact o dată. De exemplu, $b = 3$ este o bază confortabilă căci $p = \overline{102}_{(3)} = 11$ este număr prim. Determinaţi toate bazele confortabile.*

*Soluţie.* Având $p = \overline{d_{b-1} \dots d_1 d_0}_{(b)}$ şi notând $s_b(p) = d_{b-1} + \cdots + d_1 + d_0$ avem evident (similar cu un cunoscut rezultat din baza 10) $p \equiv s_b(p) \pmod{b-1}$. Dar în cazul nostru vom avea $d_{b-1} + \cdots + d_1 + d_0 = (b-1) + \cdots + 1 + 0 = \dfrac{b(b-1)}{2}$. Deci pentru $b$ par avem $b-1 \mid p$ iar pentru $b$ impar avem $\dfrac{b-1}{2} \mid p$, prin urmare trebuie $b < 4$. Iar atunci $2 = \overline{10}_{(2)}$, $5 = \overline{012}_{(3)}$, $7 = \overline{021}_{(3)}$, $11 = \overline{102}_{(3)}$, $19 = \overline{201}_{(3)}$ sunt numere prime, deci bazele confortabile sunt doar $\boxed{b = 2 \text{ şi } b = 3}$. □

**Subiectul** (4)**.** *Constantin are $n$ zaruri. Fiecare zar are numerele 5 şi 6 pe două feţe opuse, şi numerele $1, 2, 3, 4$ pe celelalte patru feţe (în această ordine ciclică). El construieşte o coloană (un paralelipiped $1 \times 1 \times n$) din aceste zaruri, şi vopseşte toate feţele acestei coloane. Apoi desface coloana în zarurile componente. El observă că suma numerelor de pe feţele vopsite este mai mică decât cea a numerelor de pe celelalte feţe. Găsiţi cea mai mică valoare posibilă a lui $n$ pentru care acest lucru se poate întâmpla.*

*Soluţie.* Suma numerelor de pe feţele vopsite ale zarurilor de la capetele coloanei este cel puţin $2(1+2+3+4+5) = 30$. Suma numerelor de pe feţele vopsite ale celorlalte zaruri este cel puţin $(n-2)(1+2+3+4) = 10(n-2)$. Deoarece suma numerelor de pe un zar este 21, avem $30 + 10(n-2) < \dfrac{21n}{2}$, ceea ce forţează $n > 20$, iar un model pentru $\boxed{n = 21}$ este dat chiar de cazurile limită considerate mai sus. □

**Subiectul** (6)**.** *Fie o mulţime $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ de numere prime (distincte). Fie $S$ suma tuturor produselor posibile de câte un număr par (nenul) dintre elementele acestei mulţimi. Demonstraţi că $S + 1$ se divide prin $2^{n-2}$.*

*Soluţie.* Vom demonstra mai mult. Fie $M$ o mulţime de numere întregi, dintre care $k$ sunt impare ($1 \le k \le |M|$). Vom arăta că

$$2^{k-1} \mid \sum_{\substack{\emptyset \subseteq A \subseteq M \\ |A| \equiv 0 \pmod 2}} \prod_{a \in A} a \quad \text{şi} \quad 2^{k-1} \mid \sum_{\substack{B \subseteq M \\ |B| \equiv 1 \pmod 2}} \prod_{b \in B} b,$$

unde folosim convenţiile standard $\sum_{x \in \emptyset} x = 0$ şi $\prod_{x \in \emptyset} x = 1$. În mod evident

$$\prod_{m \in M} (1 \pm m) = \sum_{\substack{\emptyset \subseteq A \subseteq M \\ |A| \equiv 0 \pmod 2}} \prod_{a \in A} a \pm \sum_{\substack{B \subseteq M \\ |B| \equiv 1 \pmod 2}} \prod_{b \in B} b,$$

deci

$$\sum_{\substack{\emptyset\subseteq C\subseteq M\\ |C|\equiv r \pmod 2}} \prod_{c\in C} c = \frac{1}{2}\left(\prod_{m\in M}(1+m) \quad + (-1)^r \prod_{m\in M}(1\pm m)\right).$$

Dar evident $2^k \mid \prod_{m\in M}(1\pm m)$.

Faptul că numerele sunt prime este deci cu totul irelevant; singura deducţie importantă este că cel mult unul dintre ele este par, deci $n-1\leq k\leq n$. □

## 4. Clasa a XI-a

**Subiectul** (3)**.** *Acelaşi cu Subiectul 3 de la clasa a XII-a, cu restricţia suplimentară (relativ absurdă) $b\leq 12$.*

**Subiectul** (4)**.** *Acelaşi cu Subiectul 4 de la clasa a XII-a.*

**Subiectul** (6)**.** *Rezolvaţi sistemul de ecuaţii* $\begin{cases} x+y+xy &= 11,\\ x^2y+xy^2 &= 30.\end{cases}$

*Soluţie.* Scriem, cu notaţiile $x+y=s$, $xy=p$, $\begin{cases} s+p &= 11,\\ sp &= 30.\end{cases}$ Prin urmare $\{s,p\}=\{5,6\}$. Iar apoi $\boxed{\{x,y\}\in\{\{1,5\},\{2,3\}\}}$.

O dublă aplicare a trinomului de grad 2, de "un grad de dificultate mult peste nivelul competiţiilor din România", nu-i aşa? □

## 5. Clasa a X-a

**Subiectul** (3)**.** *Acelaşi cu Subiectul 3 de la clasa a XII-a, cu restricţia suplimentară (relativ absurdă) de data aceasta $b\leq 10$.*

**Subiectul** (5)**.** *Numerele întregi de la 1 la $n=99$ sunt scrise pe un cerc, într-o ordine arbitrară. Determinaţi cea mai mică valoare posibilă a sumei valorilor absolute ale diferenţelor dintre fiecare pereche de numere adiacente.*

*Soluţie.* Numerele 1 şi $n$ apar undeva pe cerc. Fie unul dintre arcele dintre ele $1=x_0-x_1-\cdots-x_{k-1}-x_k=n$ (cu $1\leq k\leq n-1$). Atunci

$$\sum_{i=0}^{k-1}|a_{i+1}-a_i| \leq \left|\sum_{i=0}^{k-1}(a_{i+1}-a_i)\right| = a_k-a_0=n-1,$$

şi la fel pe celălalt arc $1=y_0-y_1-\cdots-y_{\ell-1}-y_\ell=n$ (cu $1\leq \ell\leq n-1$)

$$\sum_{j=0}^{\ell-1}|a_{j+1}-a_j| \leq \left|\sum_{j=0}^{\ell-1}(a_{j+1}-a_j)\right| = a_\ell-a_0=n-1.$$

Prin urmare suma cerută este cel puţin $\boxed{2(n-1)}$, şi această valoare poate fi atinsă (doar) când numerele sunt scrise în ordine, în sens trigonometric sau invers.

Soluţia oficială lasă să se înţeleagă că ar putea fi chiar mai multe modele extremale, dar acest lucru nu e chiar atât de important ... Mai interesante sunt valorile alese pentru $n$, anume 99, 88 şi 77, la diverse clase, de parcă ar conta această valoare – sau se aştepta cineva că pentru valori mai mici s-ar fi putut face o analiză exhaustivă?!? Nici măcar paritatea lui $n$ nu contează. $\square$

**Subiectul** (6)**.** *Acelaşi cu Subiectul 6 de la clasa a XI-a.*

## 6. Clasa a IX-a

**Subiectul** (5)**.** *Acelaşi cu Subiectul 5 de la clasa a X-a, dar valoarea* $n = 88$*.*

## 7. Clasa a VIII-a

**Subiectul** (5)**.** *Acelaşi cu Subiectul 5 de la clasa a X-a, dar valoarea* $n = 77$*.*

## 8. Clasa a VII-a

**Subiectul** (3)**.** *Fie trei numere* ***întregi***[4] *pozitive impare* $p$*,* $q$*, şi* $r$*. Se ştie că* $p > 2q$*,* $q > 2r$*, şi* $r > p - 2q$*. Demonstraţi că* $p + q + r \geq 25$*.*

*Soluţie.* Avem $r \geq p - 2q + 2$, căci $p - 2q$ este impar. Prin urmare $p \geq 2q + 1$, $q \geq 2r + 1$, şi $r \geq p - 2q + 2 \geq 3$. Adunând cele trei inegalităţi obţinem

$$p + q + r \geq 2q + 2r + 5 \geq 6r + 7 \geq 18 + 7 = 25.$$

Egalitate se obţine evident doar pentru $(p, q, r) = (15, 7, 3)$. $\square$

## 9. Clasa a VI-a

**Subiectul** (3)**.** *Acelaşi cu Subiectul 3 de la clasa a VII-a.*

---

Deoarece selecţia problemelor interesante este extrem de sărăcuţă, voi prezenta şi câteva probleme din prima ediţie 2012/2013 (ceea ce ne permite să vedem că stilul şi gradul de dificultate ale problemelor s-au cam păstrat), unde nu au fost prezente decât două categorii de competitori – Juniori şi Seniori – şi sensibil mai puţini participanţi.

---

[4] În enunţul original, cuvântul **întregi** lipsea (desigur, specificaţia "impare" salvează oarecum situaţia ... probabil că în Rusia toate numerele sunt întregi!?!).

## 10. Seniori 2012/2013

**Subiectul** (2)**.** *Într-un pătrat de dimensiuni $7 \times 7$ fiecare celulă (pătrat $1 \times 1$) este colorată roşu, galben sau verde. Demonstraţi că există o linie, o coloană, şi o culoare pentru care există cel puţin 3 celule de această culoare în această linie şi cel puţin 3 celule de această culoare în această coloană.*

*Soluţie.* Dintre cele 49 de celule, cel puţin $\lceil 49/3 \rceil = 17$ celule sunt colorate cu o aceeaşi culoare. Dintre cele 7 linii (respectiv coloane), cel puţin una conţine cel puţin $\lceil 17/7 \rceil = 3$ celule colorate cu această culoare. Modelele următoare (ne-cerute în problemă) arată că nu se poate spune mai mult. □

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 |
| 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 |
| 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 |
| 3 | 3 | 3 | 1 | 1 | 1 | 2 |
| 3 | 3 | 3 | 1 | 1 | 1 | 2 |
| 3 | 3 | 3 | 1 | 1 | 1 | 2 |
| 2 | 2 | 2 | 3 | 3 | 3 | 1 |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 |
| 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 |
| 2 | 2 | 1 | 1 | 4 | 4 | 3 |
| 2 | 2 | 1 | 1 | 4 | 4 | 3 |
| 3 | 3 | 4 | 4 | 1 | 1 | 2 |
| 3 | 3 | 4 | 4 | 1 | 1 | 2 |
| 4 | 4 | 3 | 3 | 2 | 2 | 1 |

**Subiectul** (3)**.** *În câte feluri se poate scrie un cuvânt format din $n$ litere $A$ şi $n$ litere $B$, astfel încât să nu conţină fragmentul $ABB$?*

*Soluţie.* Notăm cu $\mathcal{F}$ familia acestor cuvinte şi cu $\mathcal{B}$ familia cuvintelor binare de lungime $n$. Stabilim o corespondenţă $\phi\colon \mathcal{F} \to \mathcal{B}$ astfel: $\phi(w)$ este cuvântul binar unde ştergem primele litere $B$ din stânga (până la prima literă $A$), apoi înlocuim toate fragmentele $AB$ cu 1, finalmente înlocuim literele $A$ rămase cu 0; de exemplu

$$w = BB(AABABA) \mapsto A(AB)(AB)A \mapsto A11A \mapsto 0110 = \phi(w).$$

Stabilim şi o corespondenţă $\psi\colon \mathcal{B} \to \mathcal{F}$ astfel: $\psi(b)$ este cuvântul unde înlocuim toate cifrele 0 cu $A$, apoi înlocuim toate cifrele 1 cu $AB$, finalmente ataşăm la stânga atâtea litere $B$ câte mai trebuie; de exemplu

$$b = 0110 \mapsto A11A \mapsto A(AB)(AB)A \mapsto BB(AABABA) = \psi(b).$$

Este uşor de văzut că $\phi$ şi $\psi$ sunt inverse una alteia, aşadar $\mathcal{F}$ şi $\mathcal{B}$ sunt în corespondenţă bijectivă, deci $\mathcal{F}$ are atâtea elemente cât şi $\mathcal{B}$, adică $\boxed{2^n}$.[5]

De departe mi se pare poate problema cea mai atractivă şi mai greu de pătruns; desigur, calculând cu mâna pentru valori mici ale lui $n$ ghicim însă repede rezultatul, şi nu ne rămâne decât să imaginăm un argument cât mai rapid şi elegant pentru a-l justifica. □

**Subiectul** (6)**.** *Numerele întregi pozitive $n$ şi $k$ sunt astfel încât $k^2 + n^2 - k$ se divide prin $kn$. Demonstraţi că $k$ este pătrat perfect.*

[5]Alternativ, se poate calcula acest număr şi cu vestita metodă **"stars and bars"**; vezi `http://en.wikipedia.org/wiki/Stars_and_bars_(combinatorics)`.

*Soluţie.* Fie $n = dm$, $k = d\ell$, cu $\mathrm{cmmdc}(m, \ell) = 1$. Avem atunci, din relaţia de divizibilitate, $dm\ell \mid d\ell^2 + dm^2 - \ell$, deci $d \mid \ell$, aşadar $\ell = fd$ şi $mfd \mid f^2d^2 + m^2 - f$, de unde $f \mid m^2$ şi $m \mid f(fd^2 - 1)$. Dar $\mathrm{cmmdc}(m, f) = 1$, deci $f \mid m^2 \mid (fd^2 - 1)^2$. Deoarece însă $\mathrm{cmmdc}(f, fd^2 - 1) = 1$, rezultă $f = 1$ şi deci $\boxed{k = d^2 = (\mathrm{cmmdc}(k, n))^2}$. □

## 11. Juniori 2012/2013

**Subiectul** (4)**.** *Putem oare partiţiona numerele* $1, 2, \ldots, 2012$ *în perechi, în aşa fel încât pentru fiecare pereche suma numerelor sale conţine doar cifre* 0 *şi/sau* 4 *în scrierea sa zecimală?*

*Soluţie.* $\boxed{\text{Nu}}$. Un număr având doar cifre 0 şi/sau 4 în scrierea sa zecimală este multiplu de 4. Prin urmare suma tuturor numerelor, care este suma tuturor sumelor numerelor din perechi, ar fi multiplu de 4, dar ea este egală cu $\dfrac{2012 \cdot 2013}{2} = 2 \cdot 503 \cdot 2013$. □

**Subiectul** (5)**.** *În unele căsuţe ale unei table de şah de dimensiuni* $8 \times 8$ *se află piese (nu mai mult de o piesă într-o căsuţă). Se observă că există* 4 *sau mai multe piese în fiecare linie şi în fiecare coloană. Este oare întotdeauna posibil să eliminăm unele piese, astfel încât să rămânem cu exact* 4 *piese în fiecare linie şi în fiecare coloană?*

*Soluţie.* $\boxed{\text{Nu}}$. Următorul model este bazat pe cunoscuta configuraţie Fano (planul proiectiv finit de ordin 2, adică BIBD-ul simetric $(7, 3, 3)$). □

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ |
| ○ | ○ | | | | ○ | | ○ |
| ○ | | ○ | | ○ | | | ○ |
| ○ | | | ○ | | | ○ | ○ |
| | ○ | | | ○ | | ○ | ○ |
| | ○ | ○ | ○ | | | | ○ |
| | | ○ | | | ○ | ○ | ○ |
| | | | ○ | ○ | ○ | | ○ |

**Subiectul** (6)**.** 15 *elefanţi sunt aşezaţi la rând, fiecare elefant cântărind un număr întreg de kilograme. Pentru fiecare elefant (în afară de ultimul), suma dintre greutatea sa şi dublul greutăţii elefantului următor este egală cu* 15000 *kg. Determinaţi greutatea fiecărui elefant (şi demonstraţi că aţi găsit toate variantele posibile).*

*Soluţie.* Avem deci $e_k + 2e_{k+1} = 15000$ pentru toţi $1 \le k \le 14$, prin urmare $2e_{k+2} = e_{k+1} + e_k$ pentru toţi $1 \le k \le 13$. Această recurenţă se poate rezolva în multe feluri; cea mai clasică revine la stabilirea polinomului caracteristic $2e^2 - e - 1 = (e-1)(2e+1) = 0$, care duce la $e_k = 5000 + 2(5000 - e_1)\left(-\dfrac{1}{2}\right)^k$.

Atunci pentru $k = 15$ avem deci nevoie de $16384 = 2^{14} \mid 5000 - e_1$, ceea ce conduce la $0 < e_1 = 5000 + 2^{14}m$ pentru deci un întreg $m \geq 0$; dar din condiţia $0 < e_2 = \dfrac{15000 - e_1}{2} = \dfrac{10000 - 2^{14}m}{2}$ rezultă $m = 0$, pentru care $\boxed{e_k = 5000}$ pentru toţi $1 \leq k \leq 15$ (să remarcăm că într-adevăr aceasta corespunde cu greutatea unui elefant adult!).

Era mai interesant să fi avut 13 elefanţi! atunci pentru $k = 13$ am fi avut nevoie de $4096 = 2^{12} \mid 5000 - e_1$, ceea ce conduce la $0 < e_1 = 5000 + 2^{12}m$ pentru deci un întreg $m \geq -1$; iar din condiţia $0 < e_2 = \dfrac{15000 - e_1}{2} = \dfrac{10000 - 2^{12}m}{2}$ rezultă $m \leq 2$, din care urmează cazurile

- $e_1 = 5000$, ceea ce conduce la $e_k = 5000$ pentru $1 \leq k \leq 13$;
- $e_1 = 5000 - 2^{12} = 4$, ceea ce conduce la $e_k = 5000 + (-1)^k 2^{13-k}$;
- $e_1 = 5000 + 2^{12}$, ceea ce conduce la $e_k = 5000 - (-1)^k 2^{13-k}$;
- $e_1 = 5000 + 2^{13}$, ceea ce conduce la $e_k = 5000 - (-1)^k 2^{14-k}$.

Oare ultimele trei cazuri ar fi trebuit eliminate, pentru că un elefant cântăreşte mai mult de 4 kg chiar de la naştere, şi nici nu poate atinge $5000 + 2^{12} = 9096$ kg niciodată? □

## 12. Încheiere

M-am risipit. Nu mai am nimic de spus. La revedere.