Etapa 4, Problema 4

Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=ax^2+bx+c$, cu $a\neq 0$, astfel încât ecuația $f(x)=x$ să nu aibă soluții reale. Arătați că nici ecuația $f(f(x))=x$ nu are soluții reale.

Olimpiadă U.R.S.S.

Soluție.

Cum ecuația $f(x)=x$ nu are soluții reale, înseamnă că trinomul $ax^2+(b-1)x+c$ nu se anulează pe $\mathbb{R}$, prin urmare are semn constant pe $\mathbb{R}$. Prin urmare, există două situații: (i) $f(x)>x, \forall x\in\mathbb{R}$ și (ii) $f(x)<x$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

Ne plasăm în primul caz și fie $x=x_0$, unde x_0 este arbitrar. Pentru $x=f(x_0)$, obținem că $f(f(x_0))>f(x_0)$ și, cum $f(x_0)>x_0$, rezultă că $f(f(x_0))>x_0$ pentru x_0 oarecare. Astfel, ecuația $f(f(x))=x$ nu are soluții reale în aceast caz.

Analog se procedează în cel de-al doilea caz.