Problemă. Demonstraţi că

$$24 \cdot \lg 3 \cdot \lg 5 < 6 \cdot \lg^2 15 < 25 \cdot \lg 3 \cdot \lg 5$$

Ştefania Constantinescu, Bucureşti

Soluţie. Putem scrie

$$\lg 15 = \lg 3 + \lg 5.$$

Dacă notăm $\lg 3 = x$ şi $\lg 5 = y$ relaţia din enunţ devine

$$24xy < 6(x+y)^2 < 25xy.$$

Inegalitatea din stânga este echivalentă cu

$$4xy < (x+y)^2$$

care devine

$$(x-y)^2 > 0$$

evident adevărată.

Inegalitatea din dreapta revine la

$$6x^2 - 13xy + 6y^2 < 0.$$

Cum $x \neq 0$ putem împărţi cu x^2 şi avem de arătat că

$$6\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 13\frac{y}{x} + 6 < 0$$

care este adevărată dacă şi numai dacă

$$\frac{2}{3} < \frac{y}{x} < \frac{3}{2}.$$

Rămâne aşadar de demonstrat că

$$\frac{2}{3} < \frac{\lg 5}{\lg 3} < \frac{3}{2}$$

Din $\lg 5 > \lg 3$ rezultă $\dfrac{\lg 5}{\lg 3} > 1 > \dfrac{2}{3}$, iar din $2\lg 5 = \lg 25 < \lg 27 = 3\lg 3$ obţinem $\dfrac{\lg 5}{\lg 3} < \dfrac{3}{2}$.