Problema 4.

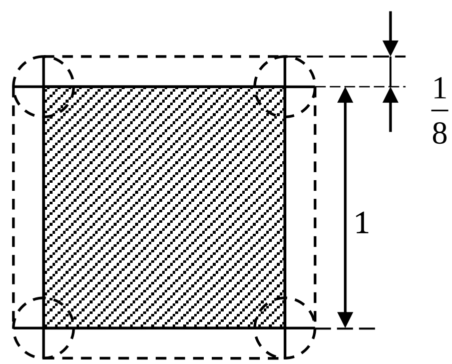
Într-un pătrat de latură 1 se consideră 64 de puncte. Arătaţi că există trei puncte dintre acestea ce pot fi acoperite cu un disc de rază $\frac{1}{8}$.

***

Soluţie.

Începem rezolvarea prin a observa că dacă cercul de rază r conţine punctul A, atunci şi centrul acestui cerc va aparţine cercului de centru A şi rază r. Deci pentru rezolvarea problemei este de ajuns să găsim trei cercuri de rază $\frac{1}{8}$, cu centrele în trei din cele 64 de puncte, care să aibă în comun un punct.

Observăm că punctele din cercurile cu centrele în unele din cele 64 de puncte pot fi depărtate de latura pătratului cu mai puţin de $\frac{1}{8}$. Aria maximă a unei figuri ce poate fi acoperită cu cercuri de rază $\frac{1}{8}$ şi cu centrele în interiorul pătratului este egală cu:



$$1+4\cdot\frac{1}{8}\cdot 1+4\cdot\frac{\pi}{4^4}=1+\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4^3}.$$

Aria celor 64 de cercuri de rază $\frac{1}{8}$ este egală cu π.

Cum $\pi-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4^3}\right)>0$ şi $\pi-2\cdot\left(1+\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4^3}\right)>0$, conform principiului lui Dirichlet există trei cercuri (de fapt discuri) care să aibă în comun un punct.