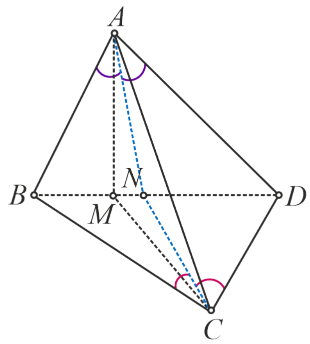
Problema 4
Etapa 7
Clasa a VIII-a

Problema 4. Fie $ABCD$ un tetraedru cu $BC < CD$, $AC \perp BD$, $\sphericalangle BDC = 45°$ şi $(ABD) \perp (BCD)$. Dacă bisectoarele unghiurilor BAD şi BCD sunt concurente, calculaţi măsura unghiului ADC.

Dana şi Cristian Heuberger

Soluţie. Alegem $M, N \in BD$, astfel încât $AM \perp BD$, iar N este punctul de intersecţie al bisectoarelor unghiurilor BAD şi BCD.



BD este perpendiculară pe dreptele concurente AC şi AM, deci $BD \perp (AMC)$ şi cum $MC \subset (AMC)$, rezultă că $BD \perp MC$.

Desfăşurăm tetraedrul în jurul laturii BD. Deoarece $AM \perp BD$ şi $CM \perp BD$, după desfăşurare, punctele A, M şi C devin coliniare.

Folosind teorema bisectoarei, deducem:

$$\frac{AB}{AD} = \frac{BN}{DN} = \frac{CB}{CD}.$$

În consecinţă, după desfăşurare, punctele A şi C se află pe cercul lui Apollonius al segmentului BD relativ la punctul A. Acest cerc este cercul de diametru NN', unde $N' \in BD$ este piciorul bisectoarei exterioare a unghiului A al triunghiului BAD. Cum diametrul NN' este perpendicular pe coarda AC, rezultă că, după desfăşurare, punctul M devine mijlocul segmentului AC, deci BD devine mediatoarea segmentului AC. Rezultă că $AM = MC$ şi $AD = CD$. Deoarece $\sphericalangle BDC = 45°$, din triunghiul dreptunghic ADM rezultă că $AD = AM\sqrt{2} = CD$. Lungimile segmentelor AD, CD, AM şi CM nu s-au modificat prin desfăşurarea tetraedrului, aşadar în triunghiul AMC de dinainte de desfăşurare, cu $\sphericalangle AMC = 90°$, folosind teorema lui Pitagora, obţinem $AC = AM\sqrt{2}$. În consecinţă, triunghiul ACD este echilateral, deci $\sphericalangle ADC = 60°$.