

**Problema 3.** Se consideră piramida regulată  $VABCD$  cu vârful în  $V$ , în care măsura unghiului format de două muchii laterale opuse este de  $45^\circ$ . Punctele  $M$ ,  $N$  și  $P$  sunt respectiv: proiecția punctului  $A$  pe dreapta  $VC$ , simetricul punctului  $M$  în raport cu planul  $(VBD)$  și simetricul punctului  $N$  în raport cu centrul,  $O$ , al bazei piramidei.

- a) Arătați că poliedrul  $MDNBP$  este piramidă regulată.
- b) Determinați măsura unghiului dintre dreapta  $DN$  și planul  $(ABC)$ .

*Mircea Fianu, Olimpiada Județeană de Matematică, 2002*

**Soluție:** (preluată din *Gazeta Matematică*)

a) Deoarece simetricul segmentului  $[CV]$  față de planul  $(VBD)$  este segmentul  $[AV]$ , deducem că  $N \in AV$  și  $VN = VM$ . În plus,  $OM = ON$ .

În triunghiul dreptunghic  $AMC$ ,  $[MO]$  este mediană, de unde  $MO = AO = CO$  și apoi

$$NO = OB. \quad (1)$$

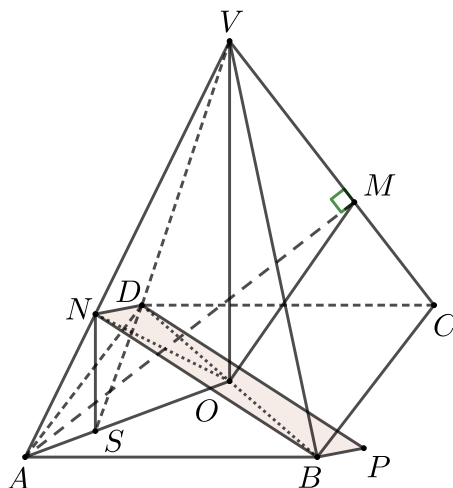
Triunghiul  $OMC$  este isoscel, deci  $\Delta MOC \sim \Delta AVC \Rightarrow m(\widehat{MOC}) = m(\widehat{AVC}) = 45^\circ$ , conform ipotezei.

Deducem că  $m(\widehat{NOA}) = 45^\circ$  și  $m(\widehat{NOM}) = 90^\circ$ , adică

$$MO \perp NO. \quad (2)$$

Conform ipotezei, segmentul  $[NP]$  are mijlocul  $O$ , ca și  $[BD]$ ; rezultă că  $NBPD$  este paralelogram.

Cum  $BD \perp (VAC)$ , rezultă  $BD \perp NO$  și, utilizând (1), obținem că  $NBPD$  este pătrat. Mai mult,  $BD \perp MO$  și din (2) rezultă că  $MO \perp (NBPD)$ , adică  $MNBPD$  este piramidă regulată.



b) Fie  $S$  proiecția punctului  $N$  pe planul bazei  $(ABCD)$ ;  $S \in AO$ . Deoarece  $m(\widehat{NOA}) = 45^\circ$ , rezultă că  $\triangle NSO$  este dreptunghic isoscel, de unde  $NS = \frac{NO}{\sqrt{2}}$ .

Pe de altă parte,  $NO = OD$  și  $NO \perp OD$ , deci  $ND = NO\sqrt{2}$ .

Atunci  $\sin(\widehat{NDS}) = \frac{NS}{ND} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}NO}{\sqrt{2}NO} = \frac{1}{2}$ , deci  $m(\widehat{NDS}) = 30^\circ$ .

Deoarece unghiul format de dreapta  $ND$  și planul  $(ABC)$  este  $\widehat{NDS}$ , problema este rezolvată: măsura unghiului cerut este de  $30^\circ$ .

