Problema 4. Se consideră 100 de puncte pe un cerc. În fiecare punct se înscrie aleator câte un număr natural de la 1 la 100. Este posibil ca suma oricăror patru numere înscrise în patru puncte consecutive să fie mai mică decât 203?

Dan Nedeianu, Drobeta Turnu-Severin

Soluţie. Notăm $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_{100}$ numerele corespunătoare celor 100 de puncte de pe cerc. Să presupunem că suma oricăror patru numere consecutive este mai mică decât 203. Putem atunci să scriem $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \leq 202$, $a_2 + a_3 + a_4 + a_5 \leq 202$, $a_3 + a_4 + a_5 + a_6 \leq 202$, ..., $a_{97} + a_{98} + a_{99} + a_{100} \leq 202$, $a_{98} + a_{99} + a_{100} + a_1 \leq 202$, $a_{99}+a_{100}+a_1+a_2 \leq 202$, $a_{100}+a_1+a_2+a_3 \leq 202$. Sunt 100 de relaţii în care fiecare număr a_i apare de 4 ori. Adunând cele 100 de relaţii obţinem $4(a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{99}+a_{100}) \leq 20200$ sau $a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{99}+a_{100} \leq 5050$ (*). Dar $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_{100}$ sunt numerele de la 1 la 100 şi atunci suma lor este 5050. Deducem că (*) poate fi adevărată numai dacă în toate cele 100 de relaţii scrise anterior avem egalitate. Asta presupune de exemplu că $a_1+a_2+a_3+a_4 = a_2+a_3+a_4+a_5$, de unde $a_1 = a_5$, ceea ce este imposibil. În concluzie, nu este posibil ca suma oricăror patru numere înscrise în patru puncte consecutive să fie mai mică decât 203.