

Ediția 6 / Etapa 1 / Clasa a V-a / Problema 2

Problema 2. Andrei scrie 20 de numere de cel puțin două cifre, având cifrele identice. Adunându-le obține suma 8712. Arătați că cel puțin două dintre numere sunt egale.

* * *

Rezolvare:

Presupunem că toate cele 20 de numere sunt diferite între ele. Cele mai mici 20 de numere, diferite între ele, de cel puțin două cifre, cu cifrele identice, sunt:

11, 22, 33, ..., 99, 111, 222, 333, ..., 999, 1111, 2222.

Suma lor este:

$11 \cdot (1+2+3+\dots+9) + 111 \cdot (1+2+3+\dots+9) + 1111 + 2222 = 11 \cdot 9 \cdot 10 : 2 + 111 \cdot 9 \cdot 10 : 2 + 3333 =$
 $= 11 \cdot 45 + 111 \cdot 45 + 3333 = (11+111) \cdot 45 + 3333 = 122 \cdot 45 + 3333 = 5490 + 3333 = 8823$, care este mai mare decât 8712.

Deoarece suma celor mai mici 20 de numere care îndeplinesc condițiile problemei este mai mare decât 8712, înseamnă că presupunerea făcută, că toate cele 20 de numere sunt diferite între ele, este falsă. Deci cel puțin două dintre numere sunt egale între ele. Cu atât mai mult suma a 20 de numere care îndeplinesc condițiile problemei, nu neapărat cele mai mici, va fi mai mare decât 8712.

(Observație: Deoarece $8823 - 8712 = 111$, adică suma celor mai mici 20 de numere care respectă condițiile problemei este cu 111 mai mare decât 8712 (suma obținută de Andrei), putem obține suma 8712 folosind cele mai mici 20 de numere care îndeplinesc condițiile problemei, astfel: putem scădea 111 din unul din numerele de la 222 la 999, iar două dintre numere vor deveni egale. Sau putem scădea doi de 111 și să adunăm un 111, etc., la numerele de trei cifre și putem avea mai mult de o pereche de numere egale între ele).