O INEGALITATE UTILĂ

Abstract. Această scurtă lecţie din ciclul pentru gimnaziu îşi propune să familiarizeze cititorii cu o formă utilă a unor inegalităţi clasice.

Lecţia 1 se adresează claselor VII, VIII.
Data: 8 februarie 2010.
Autor: Ştefan Smarandache, Şcoala 172 "Sf. Andrei"
București

1. Introducere

Forma specializată a inegalităţii Cauchy-Buniakowski-Schwarz (C-B-S) pe care o vom prezenta mai jos, împreună cu versiunea ei mai generală (caz particular al inegalităţii Hölder), sunt extrem de utile în rezolvarea unor probleme, prezentând o structură care se aplică mai direct la natura acelor probleme.

2. Rezultate

Inegalitatea 1. Fiind date $n \geq 1$ numere reale pozitive $a_1, a_2, \ldots, a_n$, are loc inegalitatea

$$\frac{x_1^2}{a_1} + \frac{x_2^2}{a_2} + \cdots + \frac{x_n^2}{a_n} \geq \frac{(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n},$$

oricare ar fi n numere reale $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Soluţie. Pentru $n = 1$ avem o trivială identitate. Pentru $n = 2$ inegalitatea devine

$$\frac{x_1^2}{a_1} + \frac{x_2^2}{a_2} \geq \frac{(x_1 + x_2)^2}{a_1 + a_2},$$

echivalentă cu $(a_1+a_2)(a_2x_1^2+a_1x_2^2) \geq a_1a_2(x_1+x_2)^2$, la rândul ei echivalentă cu $(a_1x_2 - a_2x_1)^2 \geq 0$, evident adevărat.

Presupunem acum, pentru $k \geq 2$, adevărată inegalitatea

$$\frac{x_1^2}{a_1} + \frac{x_2^2}{a_2} + \cdots + \frac{x_k^2}{a_k} \geq \frac{(x_1 + x_2 + \cdots + x_k)^2}{a_1 + a_2 + \cdots + a_k}.$$

Atunci

$$\left(\frac{x_1^2}{a_1} + \frac{x_2^2}{a_2} + \cdots + \frac{x_k^2}{a_k}\right) + \frac{x_{k+1}^2}{a_{k+1}} \geq \frac{(x_1 + x_2 + \cdots + x_k)^2}{a_1 + a_2 + \cdots + a_k} + \frac{x_{k+1}^2}{a_{k+1}},$$

şi încheiem această demonstraţie (prin inducţie) aplicând cazul $n = 2$, aşadar

$$\frac{(x_1 + x_2 + \cdots + x_k)^2}{a_1 + a_2 + \cdots + a_k} + \frac{x_{k+1}^2}{a_{k+1}} \geq \frac{((x_1 + x_2 + \cdots + x_k) + x_{k+1})^2}{(a_1 + a_2 + \cdots + a_k) + a_{k+1}}.$$

Parteneriat Societatea de Ştiinţe Matematice din România şi Intuitext
www.ViitoriOlimpici.ro

Acest rezultat a ajuns să fie cunoscut sub numele *varianta Titu Andreescu*, dar în fapt este un caz particular direct al inegalităţii C-B-S, căci dacă facem notaţiile $B_i = \sqrt{a_i}$, $A_i = \dfrac{x_i}{B_i}$, atunci $A_i B_i = x_i$, şi deci revine la

$$\left(A_1^2 + \cdots + A_n^2\right)\left(B_1^2 + \cdots + B_n^2\right) \geq \left(A_1 B_1 + \cdots + A_n B_n\right)^2,$$

care este chiar inegalitatea C-B-S. □

O generalizare a rezultatului de mai sus, cunoscută sub numele *varianta Radon*, şi care este la rândul ei un caz particular direct al inegalităţii Hölder, este

Inegalitatea 2. Fie $x_1, x_2, \ldots, x_n$ şi $a_1, a_2, \ldots, a_n$ numere reale pozitive, şi p număr real pozitiv. Atunci

$$\frac{x_1^{p+1}}{a_1^p} + \frac{x_2^{p+1}}{a_2^p} + \cdots + \frac{x_n^{p+1}}{a_n^p} \geq \frac{(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^{p+1}}{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^p}.$$

Soluţie. Vom rescrie inegalitatea în forma

$$\sum_{i=1}^n a_i \left(\frac{x_i}{a_i}\right)^{p+1} \geq \left(\sum_{j=1}^n a_j\right)\left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\sum_{i=1}^n a_i}\right)^{p+1}$$

sau, echivalent

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{\sum_{j=1}^n a_j}\left(\frac{x_i}{a_i}\right)^{p+1} \geq \left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\sum_{i=1}^n a_i}\right)^{p+1}.$$

Considerând funcţia convexă $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = x^{p+1}$, ultima inegalitate decurge acum din inegalitatea Jensen

$$\lambda_1 f(\alpha_1) + \lambda_2 f(\alpha_2) + \cdots + \lambda_n f(\alpha_n) \geq f(\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \cdots + \lambda_n\alpha_n),$$

unde luăm $\lambda_i = \dfrac{a_i}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} > 0$ (deci $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$), şi $\alpha_i = \dfrac{x_i}{a_i}$. □

Evident, metoda de mai sus este aplicabilă şi Inegalităţii 1., care este un caz particular imediat, pentru $p = 1$.

3. Aplicaţii

Problema 1. Să se arate că oricare ar fi numerele reale a, b, c, avem

$$(a - 2b)^2 + (b - 2c)^2 + (c - 2a)^2 \geq \frac{1}{3}(a + b + c)^2.$$

Soluţie. Aplicând Inegalitatea 1. obţinem

$$\frac{(a-2b)^2}{1} + \frac{(b-2c)^2}{1} + \frac{(c-2a)^2}{1} \geq \frac{((a-2b) + (b-2c) + (c-2a))^2}{1+1+1},$$

dar membrul drept este evident $\dfrac{1}{3}(a+b+c)^2$. □

Problema 2. Fie a, b, c, n numere reale pozitive, şi $m = 3n + 2$. Atunci

$$\frac{a^2 + mb^2}{na + b} + \frac{b^2 + mc^2}{nb + c} + \frac{c^2 + ma^2}{nc + a} \geq 3(a + b + c).$$

Soluţie. Membrul stâng se scrie

$$\left(\frac{a^2}{na + b} + \frac{b^2}{nb + c} + \frac{c^2}{nc + a}\right) + m\left(\frac{b^2}{na + b} + \frac{c^2}{nb + c} + \frac{a^2}{nc + a}\right)$$

Aplicând Inegalitatea 1. fiecărei paranteze obţinem

$$\frac{a^2}{na + b} + \frac{b^2}{nb + c} + \frac{c^2}{nc + a} \geq \frac{(a + b + c)^2}{(n + 1)(a + b + c)},$$

$$m\left(\frac{b^2}{na + b} + \frac{c^2}{nb + c} + \frac{a^2}{nc + a}\right) \geq m\frac{(b + c + a)^2}{(n + 1)(a + b + c)},$$

de unde decurge imediat rezultatul dorit. □

Problema 3. Fie a, b, c, $d > 0$. Să se demonstreze inegalitatea

$$\frac{a}{b + 2c + d} + \frac{b}{c + 2d + a} + \frac{c}{d + 2a + b} + \frac{d}{a + 2b + c} \geq 1.$$

Etapa Naţională, Bistriţa-Năsăud, 2005

Soluţie. Un "truc" tipic este de a amplifica fiecare termen, astfel încât să obţinem forma la care putem aplica Inegalitatea 1. Aşadar vom scrie

$$\frac{a}{b + 2c + d} = \frac{a^2}{ab + 2ac + ad}$$

şi celelalte, şi atunci suma lor va fi cel puţin egală cu

$$\frac{(a + b + c + d)^2}{2(ab + bc + cd + da) + 4(ac + bd)} \geq 1,$$

căci $(a + b + c + d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2(ab + bc + cd + da) + 2(ac + bd)$, iar $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq 2(ac + bd)$.

Egalitatea se realizează pentru $a = c$ şi $b = d$. □

Problema 4. Fiind date numerele reale pozitive a, b, c, demonstraţi că

$$\frac{1}{b(a + b)} + \frac{1}{c(b + c)} + \frac{1}{a(c + a)} \geq \frac{27}{2(a + b + c)^2}.$$

OBMJ, Târgu-Mureş, România, 2002

Soluţie. Aplicând un "truc" asemănător, astfel încât să obţinem forma la care putem aplica Inegalitatea 1., vom scrie

$$\frac{1}{b(a + b)} = \frac{(1/\sqrt{b})^2}{a + b}$$

şi celelalte, şi atunci suma lor va fi cel puţin egală cu

$$\frac{(1/\sqrt{a} + 1/\sqrt{b} + 1/\sqrt{c})^2}{2(a + b + c)}.$$

Acum
$$(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})^2(1/\sqrt{a}+1/\sqrt{b}+1/\sqrt{c})^2 \geq 9^2 = 81,$$
$$(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})^2 \leq 3(a+b+c),$$
ambele fiind simple cazuri ale inegalităţii C-B-S, aşadar
$$\frac{(1/\sqrt{a}+1/\sqrt{b}+1/\sqrt{c})^2}{2(a+b+c)} \geq \frac{81}{3\cdot 2\cdot (a+b+c)^2} = \frac{27}{2(a+b+c)^2}.$$
Egalitatea se realizează pentru $a=b=c$. □

Încheiem cu o problemă extrem de recentă.

Problema 5. Fie $a, b, c \geq 0$ şi $x, y, z > 0$, astfel încât $a+b+c = x+y+z$. Demonstraţi că
$$\frac{a^3}{x^2}+\frac{b^3}{y^2}+\frac{c^3}{z^2} \geq a+b+c.$$
Etapa Judeţeană, 2009

Soluţie Oficială. Pentru $a, b \geq 0$ şi $x, y > 0$, vom demonstra mai întâi
$$\frac{a^3}{x^2}+\frac{b^3}{y^2} \geq \frac{(a+b)^3}{(x+y)^2},$$
inegalitate echivalentă cu $(bx-ay)^2\left(bx^2+2\left(a+b\right)xy+ay^2\right) \geq 0$ (unde această factorizare se obţine destul de laborios). Folosind acest rezultat, obţinem
$$\frac{a^3}{x^2}+\frac{b^3}{y^2}+\frac{c^3}{z^2} \geq \frac{(a+b)^3}{(x+y)^2}+\frac{c^3}{z^2} \geq \frac{(a+b+c)^3}{(x+y+z)^2} = a+b+c.$$
Evident problema se poate extinde la grupuri de câte n variabile.

Cu noile cunoştinţe căpătate, recunoaştem de fapt un caz particular direct al Inegalităţii 2., pentru $n=3$ şi $p=2$. Această soluţie "într-un rând" ar fi fost acceptată şi apreciată! □