



Etapa finală, Ediția a XIII-a, 2022

Clasa a VIII-a

Problema 3. Fie numerele naturale $m, n \geq 2$. Considerăm toate tabelele de numere reale cu m linii și n coloane de forma:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

cu proprietatea că suma pătratelor numerelor înscrise în fiecare coloană este egală cu 1, adică:

$$a_{1j}^2 + a_{2j}^2 + \cdots + a_{mj}^2 = 1, (\forall) j = 1, 2, \dots, n.$$

Pentru fiecare linie a unui astfel de tabel, considerăm suma tuturor produselor de câte două numere înscrise pe poziții distincte ale acelei linii, definită astfel:

$$A_i = a_{i1}a_{i2} + a_{i1}a_{i3} + \cdots + a_{i1}a_{in} + a_{i2}a_{i3} + \cdots + a_{in-1}a_{in}, (\forall) i = 1, 2, \dots, m.$$

Pentru fiecare astfel de tabel, notăm cu $S = A_1 + A_2 + \cdots + A_m$. Care este cea mai mare valoare posibilă a lui S ?

Ștefan Dumitrescu

Soluție și barem

Pentru fiecare două coloane $C_i = (a_{1i}, a_{2i}, \dots, a_{mi})$ și $C_j = (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj})$, aplicând inegalitatea Cauchy-Schwarz, avem:

$$a_{1i}a_{1j} + a_{2i}a_{2j} + \cdots + a_{mi}a_{mj} \leq \sqrt{a_{1i}^2 + a_{2i}^2 + \cdots + a_{mi}^2} \cdot \sqrt{a_{1j}^2 + a_{2j}^2 + \cdots + a_{mj}^2}.$$

Folosind ipoteza, rezultă:

$$a_{1i}a_{1j} + a_{2i}a_{2j} + \cdots + a_{mi}a_{mj} \leq 1.$$

..... **3 puncte**

Însumând pentru toate perechile (i, j) cu $1 \leq i < j \leq n$, obținem:

$$\sum_{i=1}^m A_i \leq \frac{n(n-1)}{2}.$$

..... **3 puncte**

Valoarea maximă $S = \frac{n(n-1)}{2}$ se obține, de exemplu, pentru $a_{ij} = \frac{1}{\sqrt{m}}$, $(\forall) i = 1, 2, \dots, m$, $(\forall) j = 1, 2, \dots, n$ **1 punct**