Clasa a 11-a

Problema 2. Se consideră matricele $A, P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ astfel încât P este inversabilă. Fie $B = PAP^{-1}$. Arătaţi că

$$(\operatorname{Tr} A)^2 = \left(\operatorname{Tr} B^2\right) + 2\operatorname{Tr}(B^*).$$

Concursul Viitori Olimpici, etapa a IV-a, 2021

Soluţie. Avem $B^2 = PAP^{-1}PAP^{-1} = PA^2P^{-1}$. Cum $\operatorname{Tr}(XY) = \operatorname{Tr}(YX)$, obţinem $\operatorname{Tr}(B^2) = \operatorname{Tr}((P^{-1} \cdot P) \cdot A^2) = \operatorname{Tr}(A^2)$ **2p**

Apoi $\operatorname{Tr}(B^*) = \operatorname{Tr}((PAP^{-1})^*) = \operatorname{Tr}((P^{-1})^* A^* P^*) =$
$= \operatorname{Tr}((\det(P^{-1}) \cdot (P^{-1})^{-1}) \cdot A^* \cdot P^*) = \operatorname{Tr}(\frac{1}{\det(P)} \cdot P \cdot A^* \cdot P^*) =$
$= \operatorname{Tr}((P^* \cdot \frac{1}{\det(P)} \cdot P) \cdot A^*) = \operatorname{Tr}(A^*)$..**3p**

Astfel, relaţia din concluzie devine $(\operatorname{Tr}(A))^2 = \operatorname{Tr}(A^2) + 2\operatorname{Tr}(A^*)$.

Notând cu $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ valorile proprii ale matricei A, relaţia de mai sus devine

$$(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^2 = (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2) + 2(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3),$$

care este evident adevărată. **2p**