METODE DE REZOLVARE A PROBLEMELOR DE ARITMETICĂ

Rezumat. Articolul de față prezintă mai multe metode de rezolvare a problemelor de aritmetică: metoda mersului invers, metoda falsei ipoteze, metoda comparației și metoda grafică, precum și două raționamente înrudite: reducerea la absurd și cazul cel mai nefavorabil.

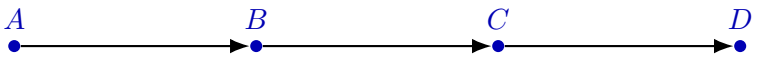
Lecția se adresează clasei a V-a.

Autor: Ion Cicu, profesor, Școala Gimnazială nr. 96, București

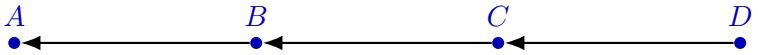
I. Metoda mersului invers

Într-o problemă care se rezolvă prin metoda mersului invers, datele problemei sunt prezentate astfel încât se exprimă una în raport cu alta. De exemplu, dacă datele problemei sunt A, B, C, D, atunci A este legat de B, B este legat de C, C este legat de D, iar D este cunoscut.

Legătura poate fi exprimată schematic așa:



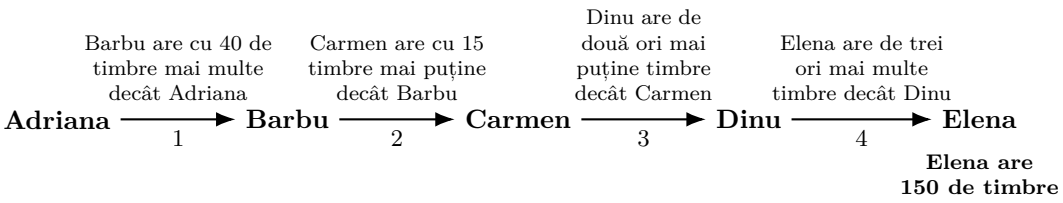
iar la rezolvare mersul este invers, așa cum spune și numele metodei și cum se vede în figura de mai jos.



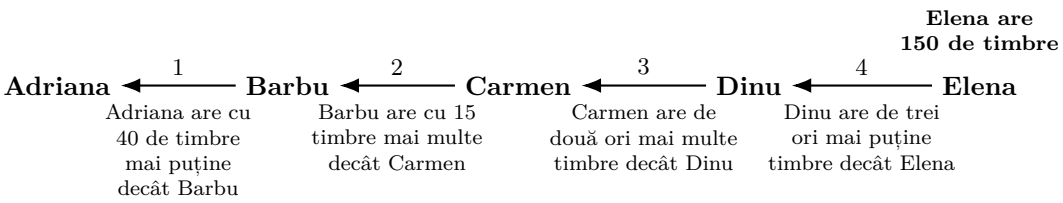
Iată un exemplu de problemă care se rezolvă prin metoda mersului invers.

Problema I.1. Barbu are cu 40 de timbre mai multe decât Adriana, Carmen are cu 15 timbre mai puține decât Barbu, Dinu are de două ori mai puține timbre decât Carmen, iar Elena are de trei ori mai multe timbre decât Dinu, adică 150 de timbre. Câte timbre are fiecare copil?

Soluție. Problema se poate reprezenta ca în figura de mai jos.



Să observăm că numărul de timbre al fiecărui copil este exprimat în raport cu numărul de timbre al altui copil. Așa cum spune și numele metodei (mersul invers), putem inversa sensul săgeților. În această situație se modifică și afirmațiile prin care numărul de timbre al fiecărui copil este legat de numărul de timbre al altui copil. Modul în care se schimbă aceste afirmații îl vedeți în figura următoare.



În acest fel problema devine foarte ușoară. Din enunț se știe că Elena are 150 de timbre, iar din afirmația 4, așa cum a fost transformată de noi, se știe că „Dinu are de trei ori mai puține timbre decât Elena”. Așadar, numărul de timbre pe care îl are Dinu este:

$$150 : 3 = 50 \text{ (timbre)}.$$

Cunoaștem acum numărul de timbre pe care îl are Dinu, iar afirmația 3, transformată de noi, ne spune: „Carmen are de două ori mai multe timbre decât Dinu”. Atunci numărul de timbre pe care îl are Carmen este:

$$50 \times 2 = 100 \text{ (timbre)}.$$

Mai departe, se știe că „Barbu are cu 15 timbre mai multe decât Carmen”, iar noi am aflat că Carmen are 100 de timbre. Atunci Barbu are

$$100 + 15 = 115 \text{ (timbre)}.$$

În sfârșit, din afirmația 1 se știe că „Adriana are cu 40 de timbre mai puține decât Barbu”, iar noi am aflat că Barbu are 115 timbre. Așadar, numărul de timbre pe care îl are Adriana este:

$$115 - 40 = 75 \text{ (timbre)}.$$

În concluzie, Adriana are 75 de timbre, Barbu are 115 timbre, Carmen are 100 de timbre, Dinu are 50 de timbre și Elena are 150 de timbre, așa cum știam de la început.

Metoda mersului invers se poate folosi cu succes și pentru a rezolva următorul tip de problemă.

Problema I.2. Aflați valoarea numărului x din egalitatea:

$$3 + 2 \times (x : 4 - 12) = 15.$$

Soluție. Pentru rezolvare gândim astfel: „$2 \times (x : 4 - 12)$” reprezintă un număr pe care îl notăm cu A, și atunci relația devine:

$$3 + A = 15.$$

De aici rezultă că $A = 15 - 3$, adică $A = 12$. Amintindu-ne cine era A, avem

$$2 \times (x : 4 - 12) = 12.$$

Acum, paranteza „$x : 4 - 12$” o considerăm un număr pe care îl notăm, de exemplu, cu P, și astfel ultima relație se scrie:

$$2 \times P = 12.$$

De aici avem $P = 6$. Cum $P = x : 4 - 12$, vom avea

$$x : 4 - 12 = 6.$$

Dacă notăm numărul $x : 4$ cu B, relația anterioară se scrie $B - 12 = 6$, de unde $B = 18$, adică

$$x : 4 = 18.$$

În sfârșit, din această ultimă relație găsim $x = 18 \times 4$, adică $x = 72$.

II. Metoda falsei ipoteze

Metoda falsei ipoteze constă în a face o presupunere convenabilă (de obicei falsă) despre mărimile necunoscute, a calcula ce ar rezulta din ea și a compara rezultatul cu datele problemei. Diferența obținută ne arată cum trebuie corectată presupunerea. Cel mai bine este să ilustrăm acest lucru cu câteva exemple reprezentative.

Problema II.1. În ograda unui țăran sunt găini și porci. Numărul capetelor este 20, iar numărul picioarelor este 50. Câte găini și câți porci sunt în ogradă?

Soluție. Cerința problemei este de a afla numărul de găini și numărul de porci. Aceasta înseamnă că în ogradă sunt și găini, și porci. Noi vom presupune că în ogradă sunt numai porci sau numai găini; trebuie să alegem una dintre situații. Să zicem că în ogradă sunt numai porci. Astfel, am făcut ipoteza: „În ogradă sunt 20 de porci”, deoarece sunt 20 de capete. Atunci numărul de picioare ar fi:

$$20 \times 4 = 80.$$

Dar în problemă se spune că sunt 50 de picioare. Ne punem întrebarea: „De unde apare diferența dintre 80 și 50, adică 30 de picioare?”. Înseamnă că în ogradă nu sunt numai porci, ci și găini.

Cum între numărul de picioare al unui porc și numărul de picioare al unei găini este o diferență de 2 picioare, înseamnă că la fiecare găină am numărat 2 picioare în plus. Deci diferența de 30 de picioare vine de la găini. Dacă la fiecare găină am numărat 2 picioare în plus, atunci numărul de găini este:

$$30 : 2 = 15.$$

Deoarece în ogradă sunt 20 de capete, iar 15 sunt capete de găină, rezultă că numărul de porci este:

$$20 - 15 = 5.$$

În concluzie, în ogradă sunt 15 găini și 5 porci.

Pentru cei care locuiesc la bloc, problema ar putea fi formulată astfel:

Problema II.2. Pe o scară de bloc sunt 20 de apartamente cu două și cu patru camere. În total, pe scară sunt 50 de camere. Câte apartamente cu două camere și câte apartamente cu patru camere sunt pe scara blocului?

Rezolvarea acestei probleme se face la fel ca la problema de mai sus, numai că în loc de găini și porci avem apartamente cu două, respectiv cu patru camere. Răspuns: 15 apartamente cu două camere și 5 apartamente cu patru camere.

III. Metoda comparației

În multe probleme, relațiile dintre mărimi sunt date explicit: cu atât mai mult, cu atât mai puțin, de atâtea ori mai mult sau de atâtea ori mai puțin. În alte cazuri, aceste relații se deduc din compararea a două situații diferite. Despre aceste probleme spunem că le rezolvăm prin metoda comparației. În rezolvarea unei probleme prin metoda comparației, esențial este să vedem care este cauza care duce la diferențierea celor două situații. Cel mai bine este să luăm un exemplu.

Problema III.1. Pentru a cumpăra 7 caiete și 3 pixuri s-au plătit 23 de lei, iar pentru 7 caiete și 8 pixuri de același fel s-au plătit 38 de lei. Care este prețul unui caiet?

Soluție. În ambele situații este vorba despre caiete și pixuri. Pentru a observa mai ușor unde apar diferențele, vom așeza datele problemei astfel:

$$\begin{array}{lll} 7 \text{ caiete} & 3 \text{ pixuri} & 23 \text{ de lei} \\ 7 \text{ caiete} & 8 \text{ pixuri} & 38 \text{ de lei} \end{array}$$

Privind cu atenție, constatăm că diferența dintre sumele de bani provine din diferența dintre numerele de pixuri. Astfel putem afirma că 5 pixuri $(8-3)$ costă 15 lei $(38-23)$. Atunci un pix costă 3 lei $(15:5)$.

Pentru a afla cât costă un caiet folosim afirmația: „pentru 7 caiete și 3 pixuri s-au plătit 23 de lei". Cum pentru un pix s-au plătit 3 lei, înseamnă că pentru 3 pixuri s-au plătit

$$3 \times 3 = 9 \text{ (lei)}.$$

Atunci pentru 7 caiete s-au plătit

$$23 - 9 = 14 \text{ (lei)}.$$

Dacă 7 caiete costă 14 lei, atunci un caiet costă

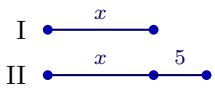
$$14 : 7 = 2 \text{ (lei)}.$$

IV. Metoda grafică

Metoda grafică presupune să înlocuim diferitele mărimi care apar în problemă cu segmente și apoi să interpretăm desenul obținut. Cel mai important lucru la această metodă este să știm să transpunem enunțul în figură și apoi să interpretăm figura astfel încât să ajungem la părți egale. Pentru aceasta, vom prezenta câteva situații care apar mai des în astfel de probleme.

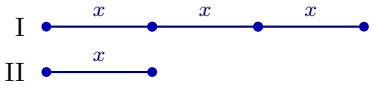
Enunțul 1. Al doilea număr este cu 5 mai mare decât primul număr.

Figura asociată:



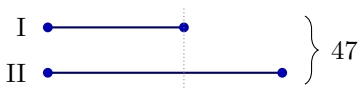
Enunțul 2. Primul număr este de trei ori mai mare decât al doilea.

Figura asociată:



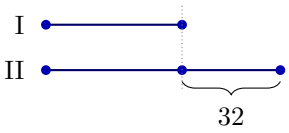
Enunțul 3. Suma a două numere este 47.

Figura asociată:



Enunțul 4. Diferența a două numere este 32.

Figura asociată:

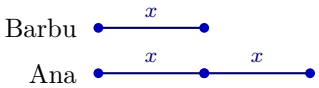


Interpretarea figurii obținute trebuie să ne conducă la părți egale. Dacă în figura asociată Enunțului 1 îl ignorăm pe 5, avem două părți egale. Din figura asociată Enunțului 2 se observă că avem patru părți egale.

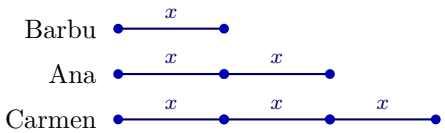
Să rezolvăm acum o problemă folosind această metodă.

Problema IV.1. Ana, Barbu și Carmen au fiecare câte o sumă de bani. Împreună, Ana și Barbu au cât Carmen. Ana are o sumă de bani de două ori mai mare decât Barbu. Barbu și Carmen au împreună 20 de lei. Ce sumă de bani are fiecare?

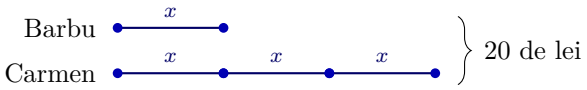
Soluție. Recitind cu atenție problema, constatăm că este bine să ordonăm informațiile puțin altfel. Mai întâi să folosim informația „Ana are o sumă de bani de două ori mai mare decât Barbu”. Aceasta se reprezintă ca în desenul de mai jos.



Să adăugăm acum informația „Împreună, Ana și Barbu au cât Carmen”.



În sfârșit, să folosim și informația „Barbu și Carmen au împreună 20 de lei”.



Ultimul desen arată patru părți egale, fiecare reprezentând suma de bani pe care o are Barbu. Așadar, Barbu are

$$20 : 4 = 5 \text{ (lei)}.$$

În continuare lucrurile sunt simple. Ana are

$$5 \times 2 = 10 \text{ (lei)},$$

iar Carmen are

$$5 + 10 = 15 \text{ (lei)}.$$

În concluzie, Ana are 10 lei, Barbu are 5 lei, iar Carmen are 15 lei.

V. Alte raționamente utile

Problemele de mai jos nu se rezolvă prin metoda falsei ipoteze, dar folosesc tot o presupunere: în prima presupunem contrariul a ceea ce trebuie demonstrat (*reducerea la absurd*), iar în a doua ne gândim la situația cea mai nefavorabilă care se poate întâmpla (*cazul cel mai nefavorabil*).

Problema V.1. Suma a șapte numere naturale, diferite de zero, este 27. Arătați că cel puțin două dintre numere sunt egale.

Soluție. Presupunem contrariul: toate cele șapte numere sunt diferite. Cel mai mic dintre ele este cel puțin 1, următorul este cel puțin 2, următorul cel puțin 3 și așa mai departe, iar cel mai mare este cel puțin 7. Atunci suma celor șapte numere este cel puțin

$$1+2+3+4+5+6+7=28.$$

Dar în problemă se spune că suma lor este 27, iar $27<28$. Am ajuns la o contradicție, deci presupunerea făcută este falsă. În concluzie, cel puțin două dintre numere sunt egale.

Problema V.2. Într-o urnă sunt 7 bile albe și 9 bile roșii. Care este cel mai mic număr de bile pe care trebuie să le extragem din urnă, fără a ne uita la ele, pentru a fi siguri că am scos o bilă albă?

Soluție. De această dată ne gândim la situația cea mai nefavorabilă care se poate întâmpla. Trebuie să scoatem din urnă o bilă albă, dar în urnă există și bile de altă culoare. Cel mai rău caz este să scoatem la început numai bile roșii.

În acest caz vom scoate mai întâi toate cele 9 bile roșii. După cele 9 extrageri, în urnă au rămas numai bile albe, deci la următoarea extragere vom scoate sigur o bilă albă. Cu 9 extrageri nu suntem siguri, pentru că toate cele 9 bile scoase pot fi roșii.

În concluzie, numărul minim de extrageri pentru a fi siguri că am scos o bilă albă este $9+1=10$.