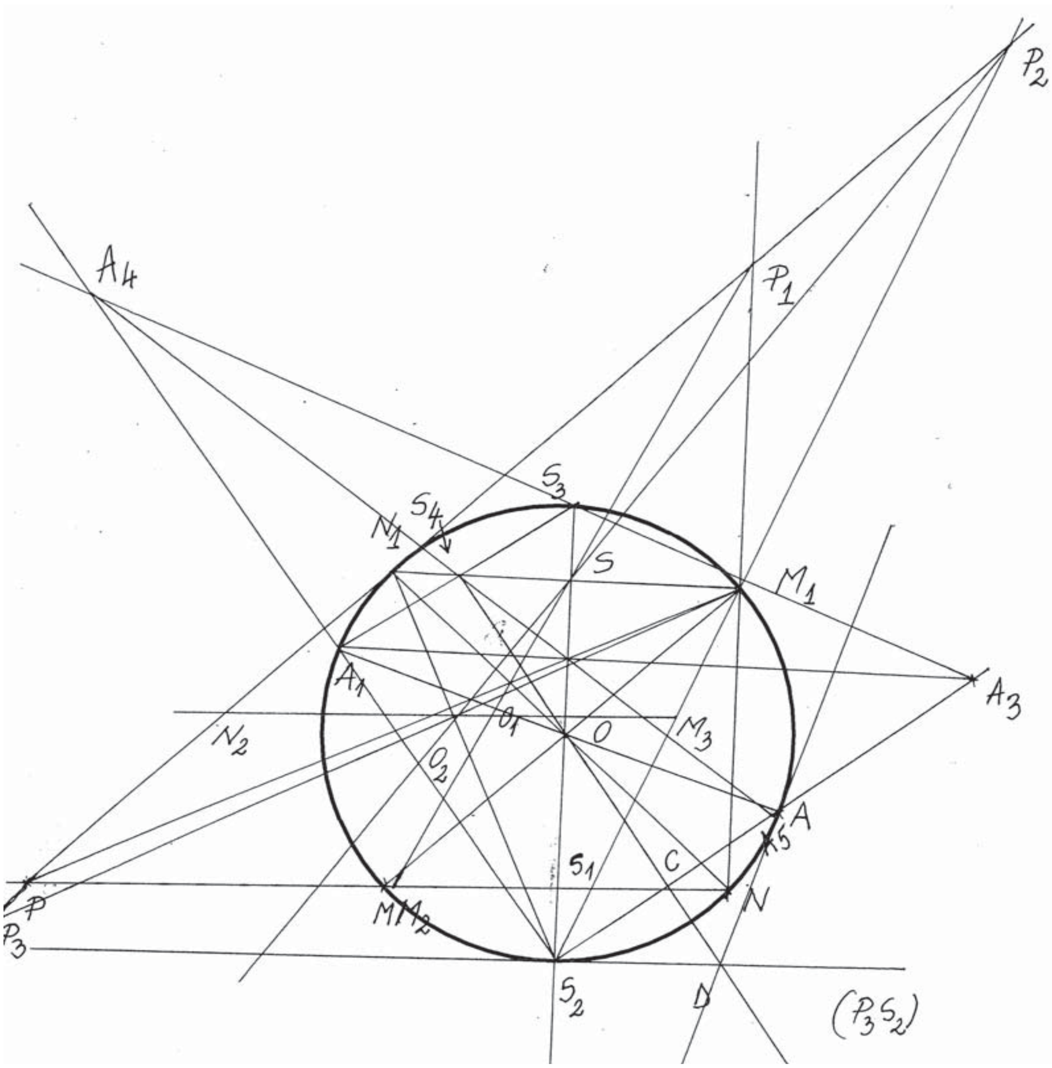
Problema 3. Fie un cerc de centru O, $\mathcal{C}(O)$. Cu rigla negradată să se construiască tangenta la $\mathcal{C}(O)$ într-un punct dat $\{A\} \in \mathcal{C}(O)$.

Niţă Cristi



Alegem două puncte $\{M\}, \{N\} \in \mathcal{C}(O)$ şi construim punctele diametral opuse acestora, M_1, respectiv N_1.

Pe MN, în afara segmentului $[MN]$ alegm un punct P. Fie $\{P_1\} = NM_1 \cap PN_1$.

În ΔP_1PN, în care $N_1M_1 \| PN$ (deoarece perechile de puncte (M, N) şi (M_1, N_1) sunt diametral opuse), construim cevienele P_1M_2, PM_1, NN_1, concurente în O_1. Aplicând teorema lui Ceva avem $\frac{N_1P}{N_1P_1} \cdot \frac{M_1P_1}{M_1N} \cdot \frac{M_2N}{M_2P} = 1$ şi cum $\frac{N_1P_1}{N_1P} = \frac{M_1P_1}{M_1N}$ (deoarece $NP \| M_1N_1$) obţinem $\frac{M_2N}{M_2P} = 1 \Rightarrow P_1M_2$ este mediană în ΔP_1NP.

Cum $M_1N_1 \| NP$, dacă notăm $\{S\} = P_1M_2 \cap M_1N_1$, rezultă că P_1S este mediană în $\Delta P_1N_1M_1 \Rightarrow \{S\}$ este mijlocul segmentului $[N_1M_1]$.

Unim S cu O şi notăm $\{S_1\} = MN \cap SO$, $\{S_2\} = \mathcal{C}(O) \cap SO$. Cum S este mijlocul coardei $[N_1M_1] \Rightarrow SO \perp N_1M_1$.

Fie $\{P_2\} = S_2M_1 \cap PN_1$, $\{O_2\} = S_2N_1 \cap P_2S$, $\{P_3\} = M_1O_2 \cap P_2P$.

* * *

Acum să analizăm următoarea configuraţie, care însă nu va fi construită în figura problemei:

Paralela prin O_2 la N_1M_1 va intersecta pe P_2P în N_2 şi pe P_2S_2 în M_3.

În $\Delta P_3M_1N_1$, în care $O_2N_2 \| M_1N_1$, vom avea $\frac{P_3O_2}{P_3M_1} = \frac{N_2O_2}{N_1M_1}$ **(1)**.

În $\Delta S_2M_1N_1$, în care $O_2M_3 \| M_1N_1$, vom avea $\frac{S_2O_2}{S_2N_1} = \frac{M_3O_2}{N_1M_1}$ **(2)**.

Cum P_2S este mediană în $\Delta P_2M_1N_1$ şi $N_2M_3 \| N_1M_1 \Rightarrow P_2O_2$ este mediană în $\Delta P_2N_2M_3 \Rightarrow [N_2O_2] \equiv [M_3O_2]$ **(3)**.

Din relaţiile **(1), (2), (3)** *vom obţine următoarea relaţie:*

$$\frac{P_3O_2}{P_3M_1} = \frac{S_2O_2}{S_2N_1} \Leftrightarrow \frac{P_3O_2}{P_3M_1 - P_3O_2} = \frac{S_2O_2}{S_2N_1 - S_2O_2} \Leftrightarrow \frac{P_3O_2}{O_2M_1} = \frac{S_2O_2}{O_2N_1} \Rightarrow$$

$\Rightarrow N_1M_1 \| P_3S_2$.

* * *

Revenim acum la figura de bază.

Cum $SO \perp N_1M_1 \Rightarrow SO \perp P_3S_2 \Leftrightarrow S_2O \perp P_3S_2$ adică P_3S_2 este tangenta la $\mathcal{C}(O)$ în S_2.

Construim punctele diametral opuse punctelor A şi S_2, anume A_1, respectiv S_3. Rezultă că $S_2A \| S_3A_1$.

Pe S_2A luăm punctul A_3 în afara segmentului $[S_2A]$.

Fie $\{A_4\} = S_2A_1 \cap S_3A_3$.

În $\Delta A_4A_3S_2$, în care $A_1S_3 \| A_3S_2$, construim cevienele A_3A_1, S_2S_3, A_4A_5, concurente în O_3. Aplicând teorema lui Ceva avem $\frac{A_1A_4}{A_1S_2} \cdot \frac{A_5S_2}{A_5S_3} \cdot \frac{S_3A_3}{S_3A_4} = 1$ şi cum $\frac{A_4A_1}{S_2A_1} = \frac{A_4S_3}{A_3S_3}$ (deoarece $A_1S_3 \| A_3S_2$), obţinem $\frac{A_5S_2}{A_5S_3} = 1 \Rightarrow A_4A_5$ este mediană în $\Delta A_4A_3S_2$, iar dacă notăm $\{S_4\} = A_4A_5 \cap A_1S_3$, rezultă că A_4S_4 este mediană în $\Delta A_4A_1S_3 \Rightarrow S_4$ este mijlocul segmentului $[A_1S_3]$.

Prelungim pe S_4O până intersectează pe S_2A în C şi pe P_3S_2 în D. Vom obţine $[S_2C] \equiv [AC]$ şi cum raza este perpendiculară pe mijlocul coardei rezultă $OC \perp S_1A$, adică OC este mediatoarea segmentului $[S_2A]$.

Dacă unim pe D cu A, vom obţine că $\Delta S_2OD \overset{\text{L.U.L.}}{\equiv} \Delta AOD$ ($[S_2O] \equiv [AO]$ = raza cercului, $[OC] \equiv [OC]$ - latura comună, $\widehat{S_2OC} \equiv \widehat{AOC}$), de unde va rezulta că $\widehat{S_2OD} \equiv \widehat{AOD} = 90^\circ$, adică DA este tangenta în A la $\mathcal{C}(O)$.

■