Problemă. Stabiliţi dacă există numere naturale x şi y, nedivizibile cu 5, pentru care

$$8x^2 + 5y^2 = 3^{2014}$$

* * *

Soluţie Numărul $3^{2014} = \left(3^{1007}\right)^2$, aşadar membrul drept al egalităţii este pătrat perfect.

Vom arăta că membrul stâng nu este pătrat perfect.

Notând cu $u(a)$ ultima cifră a lui a, avem $u(x^2)$ poate fi 1, 4, 6 sau 9 (x nu e divizibil cu 5).

Rezultă $u(8x^2)$ poate fi 8 sau 2.

$u(y^2)$ poate fi 1, 4, 6 sau 9 (x nu e divizibil cu 5) şi atunci $u(5y^2)$ poate fi 5 sau 0.

De aici deducem că $u(8x^2 + 5y^2)$ poate fi 3, 7, 8 sau 2. În niciuna dintre aceste situaţii membrul stâng nu este pătrat perfect.

În concluzie, nu există x şi y pentru care relaţia să fie adevărată.