

Concursul “Stelele Matematicii” 2013

★ ★ ★

Sâmbătă, 19 octombrie 2013, orele 09:30

★ ★ ★

Liceul Internațional de Informatică București

★ ★ ★

Proba Seniori

Problema 1. Fie \mathcal{F} familia funcțiilor bijective crescătoare $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, și fie $a \in (0, 1)$. Determinați cele mai bune constante m_a și M_a , astfel încât pentru oricare $f \in \mathcal{F}$ să avem

$$m_a \leq f(a) + f^{-1}(a) \leq M_a.$$

(În alte cuvinte, determinați atât $m_a = \inf\{f(a) + f^{-1}(a) \mid f \in \mathcal{F}\}$ cât și $M_a = \sup\{f(a) + f^{-1}(a) \mid f \in \mathcal{F}\}$)

Problema 2. Trei puncte sunt luate în interiorul unui dreptunghi; un al patrulea punct este luat în interiorul triunghiului determinat de ele.

i) Demonstrați că cel puțin unul dintre cele trei patrulatere concave formate de aceste patru puncte are perimetrul mai mic decât perimetrul dreptunghiului.

ii) Presupunând că cele trei puncte sunt vârfuri ale dreptunghiului, demonstrați că cel puțin două dintre cele trei patrulatere concave formate de aceste patru puncte au perimetrul mai mic decât perimetrul dreptunghiului.

Problema 3. Fie șirul $(a^n + 1)_{n \geq 1}$, unde $a > 1$ este un număr întreg fixat.

i) Demonstrați că există infinit de multe numere prime, fiecare fiind un divizor al măcar unui termen al șirului.

ii) Demonstrați că există infinit de multe numere prime, niciunul fiind un divizor al vreunui termen al șirului.

Problema 4. Fiind dat un număr întreg strict pozitiv (fixat) N , rezolvați ecuația funcțională

$$f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(2k) = 2f(k) \text{ și } f(N - k) = f(k), \text{ pentru oricare } k \in \mathbb{Z}.$$

Orice cerere de clarificare poate fi făcută oricând pe parcursul probei. Este permisă folosirea calculatoarelor de buzunar, dar nu conectarea la Internet. Timp de lucru $4\frac{1}{2}$ ore. Fiecare problemă valorează **10** puncte.

Problemele nu sunt prezentate în mod necesar în ordinea dificultății; niciuna nu este trivială. Concizia și claritatea redactării vor fi luate în considerație. Încercați să nu folosiți mai mult de o coală de hârtie pentru fiecare problemă. Ciornele nu se remit. Contestațiile se rezolvă în direct cu comisia problemei.

★ ★ ★ **Mult SUCCES tuturor participanților!**