CONCURSUL IMAR (L. PANAITOPOL) 2011

REDACTARE D. SCHWARZ

1. Enunţuri

1.1. **Problemă.** Fie $A_0A_1A_2$ un triunghi, şi P un punct în planul său, nesituat pe cercul circumscris γ. Dreptele PA_k intersectează a doua oară cercul γ în punctele B_k, $k \in \mathbb{F}_3 = \{0, 1, 2\}$. O dreaptă variabilă ℓ, care trece prin punctul P, intersectează dreptele $A_{k+1}A_{k+2}$ în punctele C_k, $k \in \mathbb{F}_3$. Să se arate că cele trei drepte B_kC_k, $k \in \mathbb{F}_3$, sunt concurente într-un punct Q_ℓ, şi să se determine locul geometric al punctului Q_ℓ de concurenţă, când dreapta ℓ se roteşte în jurul punctului P.

1.2. **Problemă.** Un domeniu convex plan K este situat astfel încât aria sa să fie egal distribuită în cele patru cadrane din jurul originii $O(0, 0)$, iar oricare punct laticial diferit de origine să fie situat în exteriorul lui K. Să se arate că aria lui K este strict mai mică decât 4.

1.3. **Problemă.** Fie n un număr natural mai mare sau egal cu 2. Să se arate că există o funcţie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pentru care $f(x) + f(2x) + \cdots + f(nx) = 0$ oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$, şi $f(x) = 0$ dacă şi numai dacă $x = 0$.

1.4. **Problemă.** Fie n un număr natural mai mare sau egal cu 3. Să se arate că numărul de liste ordonate de lungime cel puţin 2, formate din numere naturale nenule, relativ prime în ansamblu, a căror sumă este n, este divizibil cu 3.[1]

Date: 15 noiembrie, 2011.

[1] O astfel de listă $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$, $n_j \in \mathbb{N}^*$ pentru $1 \leq j \leq k$, are lungimea $k \geq 2$ şi proprietatea că c.m.m.d.c. $(n_1, n_2, \ldots, n_k) = 1$, iar $\sum_{j=1}^{k} n_j = n$. De exemplu, pentru $n = 4$ sunt şase astfel de liste: $(3, 1), (1, 3), (2, 1, 1), (1, 2, 1), (1, 1, 2)$ şi $(1, 1, 1, 1)$.

2. Soluţii

2.1. **Soluţie.** Fie $B_kC_k \cap B_{k+1}C_{k+1} = Q_k$, $k \in \mathbb{F}_3 = \{0, 1, 2\}$, unde Q_k poate fi punctul de la infinit (în sensul geometriei proiective). Dar atunci dreapta $\ell = PC_kC_{k+1}$ poate fi văzută ca fiind dreapta Pascal a hexagramei $A_kB_kQ_kB_{k+1}A_{k+1}A_{k+2}$, deci vârfurile ei sunt situate pe o conică. Însă această conică şi cercul γ au în comun cinci puncte, deci coincid; prin urmare cele trei drepte B_kC_k sunt concurente în punctul $Q_\ell \equiv Q_k$, $k \in \mathbb{F}_3$, situat pe cercul γ.

Pe de altă parte, pentru orice punct Q situat pe cercul γ, cele trei hexagrame $A_kB_kQB_{k+1}A_{k+1}A_{k+2}$, $k \in \mathbb{F}_3$, au în comun aceeaşi dreaptă Pascal $\ell = PC_0C_1C_2$, deci $Q \equiv Q_\ell$, şi locul geometric căutat este întreg cercul γ.

2.2. **Soluţie.** Fie punctele $A(1, 0)$, $B(0, 1)$, $C(-1, 0)$, $D(0, -1)$. Ele sunt situate în exteriorul lui K, deci putem considera linii ℓ_A, ℓ_B, ℓ_C, ℓ_D prin ele, care lasă convexul K de aceeaşi parte a planului (în care se află originea).

Dacă, de exemplu, dreapta ℓ_A intersectează axa y în interiorul segmentului BD, atunci unul din sferturile lui K, situat în cadranul I sau IV, va avea aria cel mult $1/2$, şi deci aria lui K este mai mică decât 2. Rămâne deci să considerăm cazul când fiecare dintre cele patru drepte intersectează axa opusă la o distanţă de la origine mai mare decât 1 (sau este paralelă cu ea), şi atunci putem considera punctele $W = \ell_A \cap \ell_B$, $X = \ell_B \cap \ell_C$, $Y = \ell_C \cap \ell_D$, $Z = \ell_D \cap \ell_A$, situate respectiv în cadranele I, II, III, IV. Patrulaterul $WXYZ$ conţine pe K şi este convex, deci are (cel puţin) un unghi de măsură cel puţin $\pi/2$, fie el de exemplu unghiul din W. Dar atunci aria patrulaterului $OAWB$ este cel mult aria triunghiului OAB, care este $1/2$, plus aria triunghiului WAB, care este cel mult $1/2$, căci înălţimea din W pe AB este cel mult atât de lungă cât înălţimea din O pe AB. Rezultă că aria lui K din primul cadran este mai mică decât 1, şi deci aria lui K este mai mică decât 4.

Remarcă. Problema a fost dată la concursul Putnam din 1979, B5. Ea este puternic reminiscentă de rezultatul clasic al lui Minkowski, anume că un domeniu convex plan, central simetric în origine, şi care nu conţine alte puncte laticiale, are aria mai mică decât 4. Cu toate acestea, efortul de a reduce problema de faţă pentru a putea aplica rezultatul lui Minkowski (dacă acest lucru este posibil), pare a fi mai mare decât cel de mai sus, de a da o demonstraţie pornind de la principii primare.

2.3. **Soluţie.** Este clar că trebuie să luăm $f(0) = 0$. Pentru $1 \leq x < n$ definim $f(x) = 1$. Fie $a = n/(n-1)$. Pentru $na^k \leq x < na^{k+1}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ definim $f(x) = -\sum_{j=1}^{n-1} f(jx/n)$, iar pentru $2^{-k-1} \leq x < 2^{-k}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ definim $f(x) = -\sum_{j=2}^{n} f(jx)$. Finalmente, pentru valori negative $x < 0$ putem lua $f(x) = \lambda f(-x)$ pentru orice constantă $\lambda \neq 0$.

Remarcă. Este suficient să putem defini o astfel de funcţie peste $\mathbb{Q}_+^*$ (şi să luăm $f(0) = 0$ în mod obligatoriu). Relaţia $x \sim y$ dacă $x/y \in \mathbb{Q}_+^*$ este o relaţie de echivalenţă pe $\mathbb{R}^*$, şi putem defini funcţia f pe clasa $\hat{x} \neq \hat{1}$ prin alegerea unui reprezentant $x_0 \in \hat{x}$, cu $f(qx_0) = f(q)$ pentru orice $q \in \mathbb{Q}_+^*$ (căci acţiunea lui f este complet separată, peste fiecare clasă).

2.4. **Soluţie.** Pentru orice număr întreg $n \geq 1$, o listă ordonată formată din k întregi pozitivi cu suma n, se numeşte o *compoziţie* a lui n în k părţi, vezi `http://en.wikipedia.org/wiki/Composition_(number_theory)`.

Numărul total de compoziţii este 2^{n-1}, căci dacă scriem un şir format din n cifre 1, iar în cele $n-1$ spaţii dintre ele punem semnele "+" sau "," în toate modurile posibile, obţinem o corespondenţă bijectivă cu compoziţiile lui n. Să notăm cu $f(n)$ numărul compoziţiilor $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$, $k \geq 1$, având proprietatea c.m.m.d.c. $(n_1, n_2, \ldots, n_k) = 1$; prin urmare $f(1) = 1$ (lista (1)), $f(2) = 1$ (lista $(1,1)$), $f(3) = 3$ (listele $(2,1), (1,2)$ şi $(1,1,1)$).

Atunci numărul compoziţiilor $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$, $k \geq 1$, având proprietatea c.m.m.d.c. $(n_1, n_2, \ldots, n_k) = d \mid n$, este $f(n/d)$, deci

$$2^{n-1} = \sum_{d \mid n} f(n/d) = \sum_{d \mid n} f(d).$$

Având $f(n) = 3$, vom proceda prin inducţie. Pentru $n \geq 3$ impar vom avea deci $f(n) \equiv 2^{n-1} - f(1) \equiv 1 - 1 = 0 \pmod 3$, iar pentru $n > 3$ par vom avea deci $f(n) \equiv 2^{n-1} - f(2) - f(1) \equiv 2 - 1 - 1 = 0 \pmod 3$. În ambele cazuri obţinem $f(n) \equiv 0 \pmod 3$, adică $3 \mid f(n)$.

Remarcă. Folosind formula de inversiune a lui Möbius obţinem

$$f(n) = \sum_{d \mid n} \mu(n/d) 2^{d-1},$$

unde μ este funcţia lui Möbius. Prin urmare $f(n) \equiv \mu(n) = 1 \pmod 2$ dacă şi numai dacă n este un număr liber de pătrate.

Mult mai greu de estimat este funcţia $p(n)$ a numărului partiţiilor lui n, unde o *partiţie* a lui n este o compoziţie ne-ordonată (de exemplu $p(4) = 5$, căci avem partiţiile $(4), (3,1), (2,2), (2,1,1)$ şi $(1,1,1,1)$). O formulă asimptotică a fost obţinută de Hardy şi Ramanujan, anume $p(n) \sim \dfrac{1}{4n\sqrt{3}} e^{\pi\sqrt{2n/3}}$ pentru $n \to \infty$. Ramanujan a descoperit remarcabile congruenţe satisfăcute de funcţia $p(n)$, anume $p(5k+4) \equiv 0 \pmod 5$, dar şi $p(7k+5) \equiv 0 \pmod 7$ şi $p(11k+6) \equiv 0 \pmod{11}$,
vezi `http://en.wikipedia.org/wiki/Partition_(number_theory)`.