Problema 4
Etapa 5
Clasa a IX-a

Problema 4. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ un şir strict crescător de numere naturale.

a) Dacă $(a_n)_{n\geq 1}$ este o progresie aritmetică de raţie $r \in \mathbb{N}^*$, atunci putem extrage din şiru $(a_n)_{n\geq 1}$ un şir $(b_n)_{n\geq 1}$ care să fie o progresie geometrică.

b) Stabiliţi valoarea de adevăr a propoziţiei:

(P) : "Dintr-o progresie aritmetică de numere naturale cu raţia $r \in \mathbb{N}^*$ se pot extrage o infinitate de progresii geometrice."

c) Dacă $(a_n)_{n\geq 1}$ este o progresie geometrică de raţie $q \neq 0$, arătaţi că nu putem extrage din şiru $(a_n)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică infinită $(b_n)_{n\geq 1}$.

a) Dacă alegem $b_1 = a_1$, $b_2 = a_{a_1+1} = a_1 + ((a_1+1)-1)\cdot r$ $\Leftrightarrow b_2 = a_1(1+r)$. Astfel q, rația progresiei geometrice, este egală cu $q = \frac{b_2}{b_1}$ $\Leftrightarrow q = 1+r$.

Folosindu-ne de acest aspect, putem determina următorul termen $b_3 = a_{a_1\cdot(r+2)+1} = a_1 + (a_1(r+2)+1-1)\cdot r = a_1 + a_1(r+2)r \Rightarrow \left.\begin{array}{l} b_3 = a_1(r+1)^2 \\ q = r+1 \end{array}\right\} \Rightarrow b_3 = a_1\cdot q^2$

Considerăm propoziția logică $p(n)$: „$b_n = a_1(r+1)^{n-1}$", $\forall n \in \mathbb{N}^*$, pe care o vom demonstra folosindu-ne de inducția matematică.

Prima etapă constă în verificarea lui $p(1)$: „$b_1 = a_1\cdot(r+1)^0$ $\Leftrightarrow b_1 = a_1$" (A).

Cea de-a doua etapă constă în presupunerea că $p(k)$ este adevărată, cu ajutorul căreia vom demonstra că și $p(k+1)$ este adevărată.

$b_k = a_1\cdot(r+1)^{k-1}$

$b_{k+1} = a_{a_1\cdot(r+k)+1} = a_1 + (a_1(r+k)+1-1)\cdot r = a_1(r+1)^k$

$\Rightarrow p(k+1) \in A$

Astfel, am demonstrat că $b_n = a_1(r+1)^{n-1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$
$\Leftrightarrow b_n = a_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow$ șirul $(b_n)_{n\geq 1}$ este o progresie geometrică infinită și crescătoare.

Întrucât raportul $\frac{(r+1)^{n-1}-1}{r} = \frac{((r+1)-1)((r+1)^{n-2}+(r+1)^{n-3}+\ldots+(r+1)+1)}{r}$
$= (r+1)^{n-2} + (r+1)^{n-3} + \ldots + (r+1) + 1$ sumă de nr naturale, deci raportul e natural $\Rightarrow (b_n)_{n\geq 1}$ conține doar nr naturale.

b) Când am rezolvat subpunctului precedent, am ales $b_1 = a_1$, dar putem porni de la a_2 sau a_3 sau ... sau a_k, $k \leq n$, obținând o infinitate de progresii geometrice extrase din șirul $(a_n)_{n\geq 1} \Rightarrow$ propoziția dată este adevărată.

c) Pentru a demonstra cerința acestui subpunct, ne vom folosi de metoda reducerii la absurd. Astfel, presupunem că există $\{b_1; b_2; \ldots; b_n; \ldots\} \subset \{a_1; a_2; \ldots\}$, unde $(b_n)_{n\geq 1}$ este o progresie aritmetică, iar $(a_n)_{n\geq 1}$ una geometrică.

Avem:

$$\left.\begin{array}{l} b_1 = a_x = a_1 \cdot q^{x-1}, \ x \geq 1 \\ b_2 = a_y = a_1 \cdot q^{y-1}, \ b_2 = b_1 + r, \ y > x \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow r = a_1 \cdot q^{y-1} - a_1 \cdot q^{x-1} \Leftrightarrow r = a_1 \cdot q^{x-1}(q^{y-x}-1)$
$\Leftrightarrow r = b_1 \cdot (q^{y-x}-1)$

$b_n = b_1 + (n-1)r = a_{xn}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$b_1 + (n-1)b_1(q^{y-x}-1) = a_1 q^{xn-1}$

$\Leftrightarrow a_1 \cdot q^{x-1} + (n-1)a_1 \cdot q^{x-1}(q^{y-x}-1) = q^{xn-1}a_1 \quad | : a_1$

$\Leftrightarrow q^{x-1} + (n-1) \cdot q^{x-1}(q^{y-x}-1) = q^{xn-1} \quad | : q^{x-1}$

$\Leftrightarrow 1 + (n-1)(q^{y-x}-1) = q^{xn-x}$

$\Leftrightarrow 2 - n + (n-1)q^{y-x} = q^{xn-x}$

$\Rightarrow q \mid (2-n)$, $\forall n \geq 1$, fals pentru $n = q+3$ spre exemplu

Pentru $n \geq 2 \Rightarrow b_n = a_{x_n} = a_1 \cdot q^{x_n - 1} > b_1 = a_x > a_1 q^{x-1}$
$\Rightarrow y > x > yx > 0 \Rightarrow x_n > x \Rightarrow x_n - x > 0 \Rightarrow x_{n-x} \geq 1$

Astfel, am demonstrat că dintr-o progresie geometrică de rație nr natural nenul nu se poate extrage o progresie aritmetică infinită.