Să se determine numere strict pozitive a şi b cu proprietatea că există $n \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$a^n + b^n = a^{n+1} + b^{n+1} = a^{n+2} + b^{n+2}.$$

Mihail Mogoşanu, RMT nr. 2/1986

Soluţia 1. Fie a şi b numere strict pozitive cu proprietatea că există $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $a^n + b^n = a^{n+1} + b^{n+1} = a^{n+2} + b^{n+2} \overset{\text{not}}{=} x$.
Atunci, pe de o parte, $a^{n+2} - 2a^{n+1} + a^n + b^{n+2} - 2b^{n+1} + b^n = (a^{n+2} + b^{n+2}) - 2(a^{n+1} + b^{n+1}) + (a^n + b^n) = x - 2x + x = 0$, pe de altă parte $a^{n+2} - 2a^{n+1} + a^n + b^{n+2} - 2b^{n+1} + b^n = a^n(a-1)^2 + b^n(b-1)^2$. Pentru ca $a^n(a-1)^2 + b^n(b-1)^2 = 0$, deoarece termenii sumei sunt nenegativi, rezultă că $a^n(a-1)^2 = b^n(b-1)^2 = 0$, de unde $a = b = 1$, numere care satisfac într-adevăr relaţia din enunţ.

Soluţia 2. Cum $a^{n+2} + b^{n+2} = (a+b)(a^{n+1} + b^{n+1}) - ab(a^n + b^n)$, folosind condiţia din enunţ, rezultă $1 = a + b - ab$, adică $(a-1)(b-1) = 0$. Obţinem că $a = 1$ sau $b = 1$, de unde, cu relaţiile din enunţ, $a = b = 1$, care verifică într-adevăr condiţiile date.

Soluţia 3. Din prima egalitate obţinem $a^n(1-a) = b^n(b-1)$, iar din cea de-a doua $a^{n+1}(1-a) = b^{n+1}(b-1)$. Observăm că dacă $a = 1$ atunci $b = 1$ şi invers. În plus, $a = b = 1$ satisfac relaţiile date. Dacă $a \neq 1$ şi $b \neq 1$ rezultă $\dfrac{a^{n+1}(1-a)}{a^n(1-a)} = \dfrac{b^{n+1}(b-1)}{b^n(b-1)}$, adică $a = b$. Revenind la relaţiile din enunţ, acestea devin $2a^n = 2a^{n+1} = 2a^{n+2}$ care nu pot fi satisfăcute de niciun $a > 0$, $a \neq 1$.
Prin urmare singura soluţie este $a = b = 1$.