Etapa 3, Problema 2

a) Arătați că, pentru orice $z, w \in \mathbb{C}$ *și orice* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *cu* $\alpha + \beta = 1$, *are loc identitatea*

$$|\alpha z + \beta w|^2 = \alpha |z|^2 + \beta |w|^2 - \alpha\beta |z - w|^2.$$

b) Pe laturile triunghiului ABC *se consideră punctele* $M \in (BC)$, $N \in (AC)$ *și* $P \in (BA)$ *astfel încât* $\frac{MB}{MC} = \frac{NC}{NA} = \frac{PA}{PB}$. *Demonstrați că*

$$AM^2 + BN^2 + CP^2 \geq \frac{3}{4}\left(AB^2 + AC^2 + BC^2\right).$$

Nicolae Bourbăcuț

Soluție.

a) Calcul direct, folosind faptul că $|z|^2 = z \cdot \overline{z}, \forall z \in \mathbb{C}$.

b) Fie k valoarea comună a rapoartelor din ipoteză. Raportăm planul la un reper cu originea în A și considerăm $\alpha = \frac{1}{k+1}$, $\beta = \frac{k}{k+1}$. Aplicând punctul a) pentru afixele punctelor B și C, obținem că

$$AM^2 = \frac{1}{k+1} AB^2 + \frac{k}{k+1} AC^2 - \frac{k}{(k+1)^2} BC^2.$$

Scriem încă două relații analoage și, sumând, deducem că

$$\sum AM^2 = \sum \left(1 - \frac{k}{(k+1)^2}\right) BC^2.$$

Dar $1 - \frac{k}{(k+1)^2} \geq \frac{3}{4}$ (această inegalitate fiind echivalentă cu $\frac{k}{(k+1)^2} \leq \frac{1}{4}$, sau $(2k-1)^2 \geq 0$) și, astfel, soluția este completă.

Egalitatea are loc dacă M, N, P sunt mijloacele laturilor triunghiului ABC.