Problema 2. Un plan intersectează muchiile AB, BC, CD şi AD ale unui tetraedru $ABCD$ în punctele K, L, M şi respectiv N. Arătaţi că

$$\frac{AK}{AB} \cdot \frac{BL}{BC} \cdot \frac{CM}{CD} \cdot \frac{DN}{AD} \leq \frac{1}{16}.$$

Concursul KöMaL, martie 2009, problema **B. 4170.**

Soluţie: Din teorema lui Menelaos în spaţiu (vezi Teorema 4. din materialul teoretic) rezultă că

$$\frac{BK}{AK} \cdot \frac{CL}{BL} \cdot \frac{DM}{CM} \cdot \frac{AN}{DN} = 1.$$

Atunci

$$\frac{AB}{AK} \cdot \frac{BC}{BL} \cdot \frac{CD}{CM} \cdot \frac{DA}{DN} = \left(1 + \frac{BK}{AK}\right)\left(1 + \frac{CL}{BL}\right)\left(1 + \frac{DM}{CM}\right)\left(1 + \frac{AN}{DN}\right),$$

deci este suficient să demonstrăm că dacă $a, b, c, d > 0$ satisfac $abcd = 1$, atunci $(1+a)(1+b)(1+c)(1+d) \geq 16$. Acest lucru rezultă din aplicarea inegalităţii mediilor: avem $1 + a \geqslant 2\sqrt{a}$ şi analoagele; înmulţind aceste inegalităţi (putem, pentru că numerele sunt pozitive), obţinem că $(1 + a)(1 + b)(1 + c)(1 + d) \geqslant 16\sqrt{abcd} = 16$. Egalitate avem dacă $a = b = c = d = 1$, adică dacă punctele K, L, M şi N sunt mijloacele muchiilor AB, BC, CD şi AD. (Mijloacele acestor muchii sunt într-adevăr coplanare.)