

Clasa a X-a - Etapa 4

**Problema 3.** Rezolvați ecuația

$$2^x + 2^{\sqrt{1-x^2}} = 3.$$

**Soluție.** Notăm cu  $S$ , soluția ecuației. Fie  $f(x) = 2^x + 2^{\sqrt{1-x^2}}$ ,  $x \in [0, 1]$ .  
Observăm că  $f(0) = f(1) = 3$ . Considerăm  $x \in (0, 1) \cap S$ . Atunci

$$\begin{aligned} f(x) &= 2 \cdot 2^{x-1} + 2^{\sqrt{1-x^2}} \\ \Rightarrow 3 &\geq 3 \cdot \sqrt[3]{2^{2(x-1)+\sqrt{1-x^2}}} \\ \Rightarrow 2(x-1) + \sqrt{1-x^2} &\leq 0 \\ \Rightarrow x &\leq \frac{3}{5} \end{aligned}$$

Dar,

$$\begin{aligned} f(x) &= 2^x + 2 \cdot 2^{\sqrt{1-x^2}-1} \\ \Rightarrow 3 &\geq 3 \cdot \sqrt[3]{2^{x+2(\sqrt{1-x^2}-1)}} \\ \Rightarrow x + 2(\sqrt{1-x^2} - 1) &\leq 0 \\ \Rightarrow x &\geq \frac{4}{5} \end{aligned}$$

Deci  $S = \{0, 1\}$ .