SOLUȚIE

Problema 2

Să se arate că nu există nicio progresie aritmetică care să aibă printre termenii săi numerele $1, \log_2 3$ şi $\log_3 2$.

***

Soluţie. Presupunem că $(a_n)_{n\geqslant 1}$ este o progresie aritmetică cu raţia r, care conţine printre termenii săi numerele $1, \log_2 3$ şi $\log_3 2$. Atunci există $m, p, k \in \mathbb{N}^*$, distincte, astfel încât $a_m = 1, a_p = \log_2 3$ şi $a_k = \log_3 2$, adică $a_1 + (m-1)r = 1, a_1 + (p-1)r = \log_2 3$ şi $a_1 + (k-1)r = \log_3 2$. Atunci $\log_2 3 - 1 = (p-m)r$ şi $\log_3 2 - 1 = (k-m)r$. Rezultă că

$$\frac{\log_2 3 - 1}{\log_3 2 - 1} = \frac{p-m}{k-m} \in \mathbb{Q}.$$

Notând $x = \log_2 3$ şi $y = \dfrac{p-m}{k-m}$, avem $y \in \mathbb{Q}$ şi $\dfrac{x-1}{\frac{1}{x}-1} = y$, de unde obţinem $x = -y$, adică $\log_2 3 \in \mathbb{Q}$.

Avem $\log_2 3 = \dfrac{a}{b}$, unde $a, b \in \mathbb{N}^*$ şi $(a,b) = 1$. Rezultă $2^{\frac{a}{b}} = 3$, deci $2^a = 3^b$, imposibil!

În concluzie, nu există nicio progresie aritmetică care să aibă printre termenii săi numerele $1, \log_2 3$ şi $\log_3 2$.